Уральский
федеральный
университет
имени первого Президента
России Б. Н. Ельцина
Высшая школа
экономики
и менеджмента

Н. П. БОГОЛЮБОВА

МИКРОЭКОНОМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ: ФИРМА В ПРОИЗВОДСТВЕ И В СФЕРЕ ОБМЕНА

Учебное пособие

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
УРАЛЬСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ПЕРВОГО ПРЕЗИДЕНТА РОССИИ Б. Н. ЕЛЬЦИНА

Н. П. Боголюбова

МИКРОЭКОНОМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ: ФИРМА В ПРОИЗВОДСТВЕ И В СФЕРЕ ОБМЕНА

Учебное пособие

Рекомендовано
методическим советом Уральского федерального университета
в качестве учебного пособия для студентов вуза,
обучающихся по направлениям подготовки
38.03.01 «Экономика»

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2018

УДК 330.101.542(075.8)
ББК У012.1я73-1
Б742

Рецензенты:
кафедра маркетинга и международного менеджмента
Уральского государственного экономического университета
(заведующий кафедрой доктор экономических наук,
профессор Л. М. Капустина);

В. М. Пищулов, доктор экономических наук,
профессор кафедры финансовых рынков и банковского дела
Уральского государственного экономического университета

Боголюбова, Н. П.

Б742 Микроэкономическая теория: фирма в производстве и в сфере обмена : учеб. пособие / Н. П. Боголюбова ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Урал. федер. ун-т. – Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2018. – 192 с.

ISBN 978-5-7996-2337-1

В пособии освещены основные положения теории производства и теории фирмы; проанализированы модели принятия фирмой решений в сфере производства; рассмотрена динамика доходов и издержек конкурентной фирмы; детально представлена модель максимизации прибыли и предложение конкурентной фирмы.

Адресовано студентам бакалавриата по направлению 38.03.01 «Экономика», а также преподавателям экономической теории.

УДК 330.101.542(075.8)
ББК У012.1я73-1

ISBN 978-5-7996-2337-1

ОГЛАВЛЕНИЕ

От автора

Теория индивидуального поведения фирмы является одним из ключевых разделов микроэкономики.

В рамках данного учебного пособия освещаются базовые вопросы поведения фирмы: ее технологическое ограничение и рыночные ограничения; модель формирования оптимальной комбинации факторов производства; модель выбора оптимального выпуска. Рассмотрены также проблемы целеполагания; расширения производства в коротком и длительном периодах; выбора оптимального размера фирмы.

Построение микроэкономических моделей фирмы происходит на основе освобождения от множества специфических факторов и условий деятельности.

Построению моделей фирмы предшествует принятие ряда экономических аксиом и предположений, а также ряда допущений (упрощающих предпосылок[1]), которые позволяют учесть существенные параметры принятия решений и освободиться от незначимых.

Построение моделей индивидуального поведения (поведения отдельных фирм) осуществляется исходя из таких поведенческих предпосылок, как полная рациональность и простое следование собственным интересам[2].

---

[1] К упрощающим предпосылкам анализа, позволяющим построить приемлемую модель поведения агента, относятся: наличие полной и достоверной информации относительно всех параметров, влияющих на принятие решений; наличие только координационных связей (равноправность участников экономических отношений; тип экономической системы – рыночный); игнорирование особой регулирующей роли государства; абсолютное преобладание денежных отношений (отсутствие агентов, ведущих натуральное хозяйство, и посредников); отсутствие инфляции (совпадение номинальных и реальных показателей); совпадение объемов выпуска и объемов продаж (отсутствие у фирмы товарных запасов).

[2] Принятие всех названных предпосылок позволяет рассматривать субъекты микроуровня экономики в качестве оптимизаторов, стремящихся достичь цели экономической деятельности наиболее эффективным способом и не склонных к иррациональному поведению. Кроме того, это позволяет абстрагироваться от проблем оппортунистического поведения, представляющих собой специальный раздел микроэкономического анализа (модели типа «принципал – агент»).

Структура данного учебного пособия отражает общую логику анализа индивидуального поведения фирмы. В рамках каждой главы рассматриваются основные теоретические положения, а также приводятся типовые задания (расчетные задачи, упражнения или примеры практических ситуаций), сопровождаемые подробными пояснениями алгоритма анализа (решения) и ответами. К большинству заданий приведены графические иллюстрации. Типовые задания располагаются в соответствии с принципами: от простого – к сложному; от заданий, закрепляющих знание категорий и закономерностей, – к заданиям, формирующим умения и навыки применения теоретических конструкций к анализу практических ситуаций.

Такой подход к структуре учебного пособия обусловлен реализацией образовательных программ в контексте ФГОС ВО, нацеленных на формирование общепрофессиональных компетенций, получение студентами знаний, умений и навыков применения теоретических положений к анализу хозяйственной практики.

В первой главе пособия представлены основные категории теории производства; рассматриваются производственная функция и производственное множество, показатели предельной и средней технологической эффективности факторов производства и общий эффект от использования ресурсов. Также осуществлен анализ масштаба производства и отдачи от масштаба во взаимосвязи с типами производственных функций.

Вторая глава посвящена денежной характеристике результатов производственной деятельности фирмы: здесь вводятся понятия общего, среднего и предельного дохода; анализируется их динамика.

В третьей главе речь идет о денежной характеристике затрат на осуществление производства: видах и динамике издержек в краткосрочном и долгосрочном аспектах.

Процесс формирования оптимальных комбинаций факторов производства описан в четвертой главе. Здесь также рассмотрены функции условного спроса на факторы производства; осуществлен анализ проблем расширения производства в коротком и длительном периодах; раскрыт принцип выявленности по отношению к фирме и сформулирована слабая аксиома минимизации издержек.

В пятой главе представлен анализ моделей максимизации прибыли во всем их многообразии. Здесь же развивается принцип выявленности по отношению к прибыльности фирмы, на основе которого возможна реконструкция ненаблюдаемого технологического ограничения, и представлена характеристика рыночного поведения фирмы, тестируемого через функцию индивидуального предложения.

Пособие снабжено двумя приложениями. В первом приведены основные обозначения, используемые в тексте. Во втором приложении помещена классификация моделей фирмы с указанием возможностей, которые дает каждая модель.

Формулы, системы уравнений, рисунки и типовые задания имеют нумерацию с привязкой к главам учебного пособия.

Изложение теоретического материала и подбор типовых заданий соответствуют промежуточному уровню изучения микроэкономической теории, однако отдельные разделы с успехом могут использоваться студентами, изучающими базовый (или вводный) курс микроэкономики.

Автор выражает глубокую признательность рецензентам и коллегам – преподавателям кафедры экономической теории и экономической политики ВШЭМ УрФУ за высказанные замечания и пожелания, позволившие качественно и предельно доступно изложить материал учебного пособия.

1. ТЕОРИЯ ПРОИЗВОДСТВА И ПРЕДЕЛЬНЫХ ПРОДУКТОВ

Фирма – экономический агент микроуровня экономики, осуществляющий процесс производства (в широком и узком смысле), т. е. процесс преобразования продуктов природы с целью создания объектов потребительского назначения. Фирму, действующую в сфере производства, принято называть производителем. В то же время она выступает и в качестве потребителя факторов производства – благ производственного назначения, не удовлетворяющих непосредственным образом человеческие потребности. На рынках потребительских благ фирма выступает в качестве продавца; на рынках факторов производства – в качестве покупателя. Генеральной целью деятельности фирмы является получение максимальной прибыли, однако возможны и альтернативные цели.

Началу производственной деятельности и извлечению прибыли предшествует этап, в ходе реализации которого фирма определяет, что, для кого и как она будет производить.

Осуществляя деятельность в сфере обмена и в сфере производства, фирма сталкивается с рядом ограничений: рыночными со стороны покупателей; рыночными со стороны конкурентов; ограничениями со стороны «природы». Рыночные ограничения актуальны при принятии решений в сфере обмена (вид выпускаемого продукта, его характеристики; тип взаимодействия с конкурентами).

В зависимости от продолжительности временно́го интервала, в рамках которого осуществляется принятие решений, в поведении фирмы обнаруживаются разного типа закономерности. Вследствие этого можно говорить об особенностях функционирования фирмы в краткосрочном и в долгосрочном периодах.

Результаты анализа решений фирмы в сфере производства и в сфере обмена позволяют объяснить ее реакцию на изменения внешней для нее среды (цен выпускаемого продукта и факторов производства, налогов, субсидий и т. д.); разработать меры государственной политики, направленной на стимулирование предпринимательской активности и промышленной политики в целом. Изучение процесса принятия решений производственными фирмами в конечном итоге позволяет оценить изменения в рыночном предложении и объяснить исключения из эмпирического закона предложения.

Понимание того, как изменение производственных решений фирмы в ответ на изменение конъюнктуры на рынках выпускаемого продукта и применяемых факторов производства повлияет на решения об объеме планируемых продаж (вкупе с пониманием закономерностей потребительского спроса), и лежит в основе рыночной стратегии фирмы. Иначе говоря, выводы теории фирмы крайне важны для экономической теории, для прогнозирования рынков и макроэкономической конъюнктуры. Кроме того, результаты анализа могут успешно применяться как в изучении конкретно-экономических дисциплин, так и в практической деятельности маркетологами, бухгалтерами, финансовыми консультантами и аналитиками.

1.1. Производство благ: понятие и характеристика процесса

Производственная деятельность – прерогатива такой группы экономических агентов микроуровня экономики, как фирмы. Генеральной деятельностью фирмы является максимизация общей прибыли. Прибыль извлекается в результате операций в сфере обмена. Процессу извлечения прибыли фирмой (фирмами) предшествует процесс создания благ, циркулирующих в сфере обмена, – процесс производства.

Под *производством* понимается деятельность агента, направленная на преобразование одних благ в другие. Преобразование может представлять собой изменение физической формы, химического состава; перемещение в пространстве или во времени. Цель преобразований состоит в том, чтобы созданные природой объекты приспособить к удовлетворению человеческих потребностей.

Преобразуемые блага называются **факторами производства**, или **ресурсами**, *R*. Вводимые в производственный процесс факторы производства (ресурсы) можно подразделить на следующие крупные группы: труд (способность к труду); земля и природные ресурсы; капитал (физический и денежный); предпринимательская способность; информация. Для целей анализа решений, принимаемых фирмой в сфере производства, более детальная классификация представляется избыточной, поскольку речь пойдет о количествах применяемых ресурсов, а не об их конкретной натурально-вещественной форме.

Блага, получаемые в результате преобразований, называются **конечным продуктом** (далее – **продуктом**), *Q*, и представляют собой потребительские товары и услуги[3].

В широком смысле производством занимаются и фирмы, и домашние хозяйства. Домашнее хозяйство, приобретая промежуточные продукты, меняет их натурально-вещественную форму, превращая факторы производства (ресурсы) в конечные продукты. Производством, в широком смысле, является и процесс потребления (удовлетворения потребностей), предусматривающий воспроизводство человека как носителя способности к труду и собственника факторов производства.

Для общей характеристики производственного процесса воспользуемся кибернетической схемой «черного ящика», позволяющей описать взаимосвязи между результатом производственной деятельности и понесенными затратами (рис. 1.1).

Затраты характеризуются как «вход» (*input*) системного элемента; результаты – как «выход» (*output*). Необходимо принимать во внимание, что и затраты, и результат измеряются в терминах «потока», а не «запаса». Характеризуя производственный процесс с позиций связей между «входом» и «выходом», можно выявить прямые и обратные связи в сфере производства. Прямая связь –

[3] Результатом производственной деятельности могут быть и факторы производства, предполагающие последующие преобразования. В этом случае речь идет о выпуске промежуточного, а не конечного продукта.

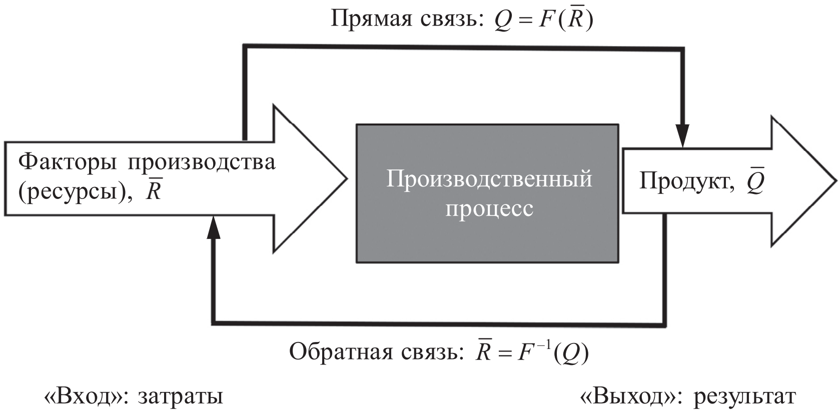

Рис. 1.1. Характеристика производственного процесса: прямая и обратная связь

зависимость результата деятельности фирмы в сфере производства (объема выпуска) от затрат – описывается с помощью производственной функции $Q = F(\overline{R})$. Обратная связь – зависимость затрат ресурсов от выпуска – описывается с помощью функции производственных затрат вида $\overline{R} = F^{-1}(Q)$. В итоге можно получить зависимость денежных затрат (издержек) от объема выпуска – ф у н к ц и ю и з д е р ж е к[4].

Эффективность производственного процесса можно рассматривать с позиций и самого агента, и общества в целом.

Производственный процесс с точки зрения общества эффективен, если полезность продукта превышает полезность ресурсов, использованных для его производства: $U(\overline{Q}) > U(\overline{R}(\overline{Q}))$.

С позиций фирмы производственный процесс эффективен, если результат деятельности (в денежном выражении) не меньше затрат (в денежном выражении) и позволяет обеспечить вознаграждение собственникам всех применявшихся ресурсов.

[4] Функция издержек, наряду с функцией дохода, позволяет охарактеризовать деятельность фирмы в сфере обмена.

1.2. Производственная функция и производственное множество

Принимая решения в сфере производства, фирма сталкивается с ограничениями, налагаемыми «природой». Эти ограничения называют технологическими.

Далеко не все комбинации ресурсов могут быть использованы в процессе производства данного объема выпуска. Следовательно фирма должна ограничить свой выбор технологически выполнимыми производственными программами. Описание выполнимых производственных программ, по сути, есть составление перечня комбинаций вводимых ресурсов и выпусков, являющихся технологически достижимыми.

Множество всех комбинаций используемых ресурсов и выпусков, которые охватывают технологически достижимые способы производства, называется производственным множеством.

Производственное множество показывает возможные для данной фирмы варианты технологического выбора. На рис. 1.2 приведено производственное множество для случая применения одного ресурса (R_j). Принадлежность некоторой точки (R_j, Q) к производственному множеству означает, что, имея ресурс в объеме R_j, технологически возможно произвести продукт в объеме не меньше, чем Q.

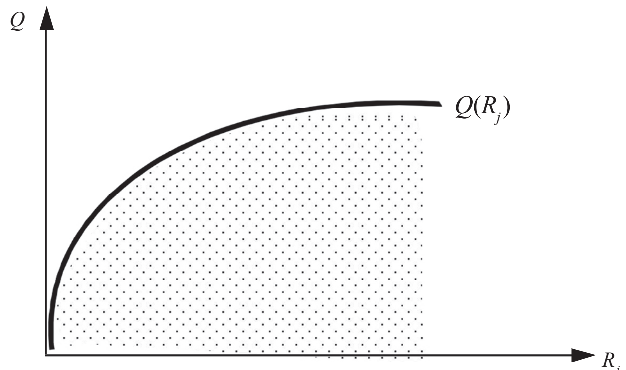

Рис. 1.2. Производственное множество для случая использования одного фактора производства, R_j

Необходимость оплаты используемых ресурсов предопределяет целесообразность ограничения выбора только теми точками производственного множества, которые соответствуют максимально достижимому выпуску при данном объеме вводимого ресурса. Совокупность таких точек для разных количеств используемых ресурсов – граница производственного множества.

Функция, описывающая границу производственного множества, называется п р о и з в о д с т в е н н о й ф у н к ц и е й. То есть производственная функция показывает максимально возможный выпуск, обеспечиваемый данным количеством используемого ресурса.

Производственное множество, являющееся отображением применяемых технологий, обладает рядом свойств. К ним относятся монотонность и выпуклость[5].

Монотонность производственного множества означает, что увеличение количества хотя бы одного применяемого фактора производства дает возможность произвести объем продукта не меньший, чем исходная комбинация факторов производства. Данное свойство также называют свойством свободного (бесплатного) распоряжения: чем больше ресурса, за который не надо платить, тем лучше (по крайней мере, не хуже). Из определения свойства «монотонность» следует, что в производственное множество не включаются комбинации факторов производства такие, что: увеличение количества фактора уменьшает объем выпуска. Формально свойство монотонности может быть описано следующим образом: если точка $(\bar{R}, Q)$ принадлежит производственному множеству $\bar{Z}$, а комбинация факторов $\bar{\bar{R}}$ такова, что $\bar{\bar{R}} \geq \bar{R}$, то точка $(\bar{\bar{R}}, \bar{Q})$ также принадлежит производственному множеству $\bar{Z}$.

Наличие у производственного множества свойства *выпуклости* означает, что любая линейная комбинация двух способов производства объема Q, принадлежащих производственному множеству,

[5] Характеризуя свойства производственного множества, необходимо помнить о различиях свойств «монотонность» и «строгая монотонность»; «выпуклость» и «строгая выпуклость». Различия данных свойств подробно рассматриваются при анализе теории потребительского поведения.

в состоянии обеспечить выпуск на уровне не ниже Q. Формальное представление свойства выпуклости производственного множества таково:

если $(\bar{R}, Q) \in \bar{Z}$ и $(\tilde{\bar{R}}, \tilde{Q}) \in \bar{Z}$, то $\left[\alpha\bar{R} + (1-\alpha)\tilde{\bar{R}};\ \alpha Q + (1-\alpha)\tilde{Q}\right] \in \bar{Z}$ при $\forall\ \alpha \in\ [0, 1]$.

Итак, производственная функция описывает границу производственного множества и показывает, как объем выпуска в натуральном выражении зависит от затрат ресурсов в натуральном выражении. Производственная функция имеет вид $Q = F(\bar{R}) = F(R_1, R_2, ..., R_m)$, где R_j – затраты ресурса вида j ($\forall\, j = 1, 2, ..., m$). Производственная функция характеризует прямую связь в производстве (связь «затраты – результат»).

Факторы, применяемые в производственном процессе, могут являться как субститутами, так и комплементариями. В производстве могут использоваться одна технология или несколько линейно комбинируемых технологий. Это отражается в типе производственной функции. Типы производственных функций разнообразны. К основным типам производственных функций относят функцию Кобба – Дугласа и функцию леонтьевского типа. Другие типы производственных функций будут рассмотрены далее, в анализе производственных процессов с двумя переменными факторами.

Производственная функция Кобба – Дугласа описывает производственный процесс, в котором факторы производства являются несовершенными субститутами. Количество применяемых технологий (сочетаний используемых факторов производства) бесконечно. Для случая применения m видов факторов производства функция Кобба – Дугласа имеет вид

$$Q = A \cdot \prod_{j=1}^{m} R_j^{a_j} = A \cdot R_1^{a_1} \cdot R_2^{a_2} \cdots R_m^{a_m}, \tag{1.1}$$

где A – общая факторная производительность (TFP), или отдача от технологии; R_j – объем использования фактора вида j; a_j – показатель степени, демонстрирующий технологическую эффективность фактора вида j. Следует принимать во внимание, что для всех a_j справедливо: $a_j > 0$.

Производственный процесс, в котором факторы производства комплементарны и применяется единственно возможная технология, описывается леонтьевской производственной функцией. Для случая применения m видов факторов производства такая функция имеет вид

$$Q = A \cdot \min \{a_1 \cdot R_1, a_2 \cdot R_2 \cdots a_m \cdot R_m\}, \qquad (1.2)$$

где A – общая факторная производительность (*TFP*), или отдача от технологии; R_j – объем использования фактора вида j; a_j – показатель, демонстрирующий технологическую эффективность фактора вида j.

Применяемые в производственном процессе факторы имеют различную технологическую эффективность (отдачу). Необходимы и оценка целесообразности применения отдельного ресурса, и определение границ применения факторов производства. Анализу этих проблем посвящен следующий подраздел.

1.3. Эффективность использования факторов производства. Динамика общего, среднего и предельного продуктов переменного фактора

В зависимости от наличия связи между объемом выпуска и объемом использования ресурса факторы производства подразделяются на переменные и постоянные.

Постоянные факторы производства – ресурсы, количество которых в производственном процессе не зависит от объема выпуска и/или не может быть изменено в рамках короткого периода.

Переменные факторы вводятся в производственный процесс в количестве, зависящем от объема выпуска.

В сфере производства принимается решение о структуре и составе комбинации ресурсов, посредством которой осуществляется выпуск. Отбирая переменные ресурсы для включения в производственный процесс, фирма оценивает эффективность их использования. Отбор осуществляется на основе анализа производительности ресурса, определяемой с помощью производственной функции. Алгоритм анализа таков: фиксируется количество всех ресурсов, за исключением, например, j-го. Данный ресурс (j-го вида) становится единственным переменным, прочие факторы производства являются постоянными: $R_k = \text{const} = R_k^*,\ \forall\, k = \overline{1, m}, k \neq j$. Далее определяются объемы выпуска при различных количествах переменного фактора, т. е. рассчитывается эффект от использования данного ресурса – *общий продукт j-го фактора* (*total product – TP_j*):

$$TP_j(R_j) = Q(R_1^*, R_2^*, ..., R_{j-1}^*, R_{j+1}^*, ..., R_m^*, R_j) = Q(\overline{R^*}, R_j). \quad (1.3)$$

Средняя эффективность (производительность) переменного фактора определяется величиной *среднего продукта переменного фактора* (*average product – AP_j*):

$$AP_j(R_j) = \frac{TP_j(R_j)}{R_j} = \frac{Q(\overline{R^*}, R_j)}{R_j}. \quad (1.4)$$

Оценка эффективности использования дополнительной единицы ресурса (предельной производительности) осуществляется с помощью *предельного продукта переменного фактора* (*marginal product – MP_j*). Для случая, когда переменный фактор непрерывен (непрерывна и производственная функция), величина предельного продукта определяется следующим образом:

$$MP_j(R_j) = \frac{\partial TP_j(R_j)}{\partial R_j} = \frac{\partial Q(\overline{R^*}, R_j)}{\partial R_j}. \quad (1.5)$$

Если переменный фактор дискретен, производственная функция также задана дискретно, и предельный продукт переменного фактора определяется как разница между общим продуктом фактора после введения дополнительной единицы ресурса и общим продуктом фактора до введения в производственный процесс дополнительной единицы ресурса:

$$MP_j(R_j) = Q(\overline{R^*}, R_j) - Q(\overline{R^*}, R_j - 1). \quad (1.6)$$

Далее обратимся к анализу динамики общего, среднего и предельного продуктов переменного фактора. Будем полагать, что фирма использует два фактора производства – переменный фактор «труд» (L) и постоянный фактор «капитал» (K). На рис. 1.3 показано, как – в самом общем случае – изменяются величины предельного и среднего продукта труда (верхняя часть рисунка) и общего продукта труда (нижняя часть рисунка) при изменении объемов использования труда[6].

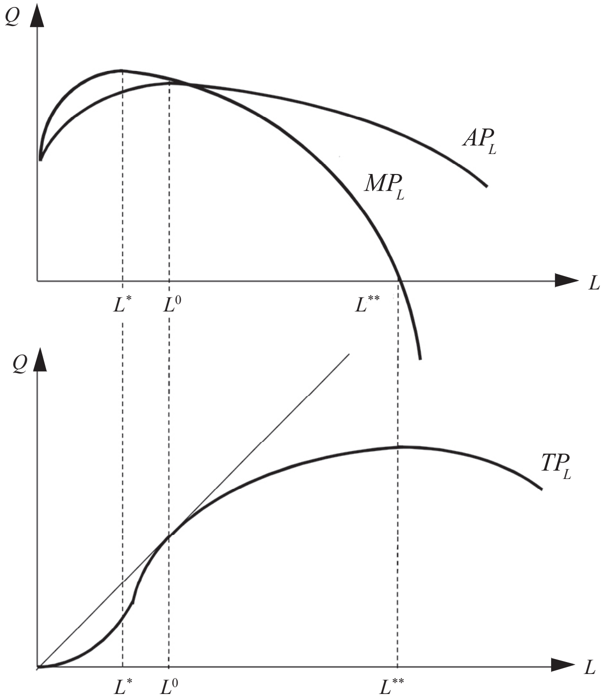

Рис. 1.3. Динамика общего, среднего и предельного продуктов переменного фактора «труд»

[6] Возможны иные схемы развития событий. Например, предельный продукт переменного фактора постоянен; или предельный продукт переменного фактора изначально убывает. В этих случаях будет меняться также динамика среднего и общего продукта переменного фактора.

Поскольку фактор «труд» является переменным и сочетается с фиксированным количеством капитала, изначально наблюдается абсолютная недостаточность труда[7] (и абсолютная избыточность капитала) – количество применяемого труда: $0 < L \leq L^*$. Предельный продукт труда достигает максимума при объеме использования фактора L^*.

Увеличение количества труда обусловливает изменение ситуации. В интервале $L^* \leq L \leq L^0$ труд становится относительно недостаточным[8] (а капитал – относительно избыточным). При объеме использования труда L^0 средний продукт труда достигает максимальной величины. В этом случае переменный фактор наилучшим образом сочетается с фиксированным количеством фактора «капитал».

При $L^{0*} < L \leq L^{**}$ наблюдается относительная избыточность труда[9] (и относительная недостаточность капитала).

В случае, когда $L > L^{**}$, труд становится абсолютно избыточным[10] и функция предельного продукта труда принимает отрицательные значения (табл. 1.1).

Анализ динамики предельного и среднего продукта позволяет определить границы применения ресурса: не должно наблюдаться ни абсолютной избыточности, ни абсолютной недостаточности фактора производства. То есть предельный продукт труда должен быть положительным и убывать по мере увеличения количества ресурса в производственном процессе. Следовательно границы применения труда таковы: $L^* \leq L \leq L^{**}$.

---

[7] Признаком абсолютной недостаточности фактора производства является рост его предельного продукта при увеличении объема использования данного ресурса, или однонаправленные изменения количества ресурса и величины его предельного продукта.

[8] Относительная недостаточность фактора производства проявляется в случае, когда наблюдается снижение его предельного продукта.

[9] Относительная избыточность фактора производства обнаруживается при снижении среднего продукта этого фактора.

[10] Фактор производства является абсолютно избыточным, если его предельный продукт имеет отрицательные значения.

Таблица 1.1

Изменения предельного и среднего продуктов переменного фактора «труд» при фиксированном объеме использования фактора «капитал»

Объем использования фактора «труд», L	Характеристика применяемых факторов	Величина предельного продукта	Изменение предельного продукта	Величина среднего продукта	Изменение среднего продукта
$0 < L \le L^*$	L – абсолютно недостаточен; K – абсолютно избыточен	$MP_L > 0$	$\frac{\partial MP_L}{\partial L} > 0$	$AP_L > 0$	$\frac{\partial AP_L}{\partial L} > 0$
$L^* \le L \le L^0$	L – относительно недостаточен; K – относительно избыточен	$MP_L > 0$	$\frac{\partial MP_L}{\partial L} < 0$	$AP_L > 0$	$\frac{\partial AP_L}{\partial L} > 0$
$L^0 \le L \le L^{**}$	L – относительно избыточен; K – относительно недостаточен	$MP_L \ge 0$	$\frac{\partial MP_L}{\partial L} < 0$	$AP_L > 0$	$\frac{\partial AP_L}{\partial L} < 0$
$L > L^{**}$	L – абсолютно избыточен; K – абсолютно недостаточен	$MP_L < 0$	$\frac{\partial MP_L}{\partial L} < 0$	$AP_L > 0$	$\frac{\partial AP_L}{\partial L} < 0$

Расширив проведенный анализ на все используемые фирмой факторы производства, определим границы их применения и совокупность различных комбинаций факторов, входящих в так называемую *экономическую область*[11] – часть производственного множества, включающую только такие комбинации факторов, для которых нехарактерна абсолютная недостаточность или абсолютная избыточность какого-либо ресурса.

[11] «Экономическая область» – понятие, не имеющее широкого распространения. Оно применяется для удобства, позволяя кратко охарактеризовать совокупность технологически эффективных комбинаций факторов производства.

Формально комбинации факторов из экономической области должны удовлетворять следующим условиям:

$$MP_j = \frac{\partial Q(\bar{R})}{\partial R_j} \geq 0, \;\; \forall \; j = \overline{1, m}. \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial MP_j}{\partial R_j} = \frac{\partial^2 Q(\bar{R})}{\partial R_j^2} < 0, \;\; \forall \; j = \overline{1, m}. \tag{1.8}$$

Выполнение условия (1.7) означает, что ни один из факторов производства не является абсолютно избыточным. Выполнение условия (1.8) свидетельствует об отсутствии абсолютной недостаточности какого-либо фактора.

Таким образом, ранее рассмотренное свойство монотонности производственного множества приобретает экономический смысл. Формируя комбинацию факторов для определенного объема выпуска, фирма должна рассматривать далеко не все возможные технологически достижимые способы производства. Выбор должен осуществляться из совокупности технологически эффективных способов производства (комбинаций факторов), отвечающих условиям (1.7) и (1.8).

1.4. Производство с двумя переменными факторами: графический анализ производственных функций

Отображением производственной функции являются кривые равного продукта (изокванты), образующие карту изоквант для производителя.

Изокванта (кривая равного продукта) – совокупность комбинаций факторов производства (ресурсов), разных по составу, но обеспечивающих выпуск продукта на одинаковом уровне.

Карта изоквант – отображение на плоскости производственного множества, совокупность кривых равного продукта для производственной функции определенного типа.

Изокванты обладают рядом свойств:

– каждой изокванте соответствует определенный уровень выпуска;

– чем дальше от начала координат находится изокванта, тем бóльший объем выпуска обеспечивают составляющие ее комбинации ресурсов (в границах экономической области);

– изокванты не пересекаются (каждая комбинация ресурсов в данном производственном процессе может обеспечить выпуск только на определенном уровне);

– касательные к изоквантам имеют отрицательный наклон (в случае, когда факторы производства являются субститутами).

Изокванты напоминают кривые безразличия, рассматриваемые в теории потребительского поведения. Однако имеется существенное отличие: изокванты отражают не уровень полезности (порядок предпочтений), а объективно измеримый объем выпуска. Изокванта отражает зависимость выпуска от затрат факторов производства, определяется технологией и не имеет той произвольной природы, которая присуща кривым безразличия и функции полезности.

Важнейшей характеристикой изоквант для производственных функций с ресурсами-субститутами является *предельная норма технического* (*технологического*) *замещения* (*marginal rate of technical substitution – MRTS*). $MRTS_{ji}$ показывает пропорцию замены фактором j-го вида фактора вида i при условии сохранения выпуска на неизменном уровне и определяется для конкретной комбинации факторов. Иначе: $MRTS_{ji}$ рассчитывается в точке. Для различных комбинаций факторов производства величины $MRTS_{ji}$ различны. Исключение составляют случаи вырожденных производственных функций.

Формулу для определения предельной нормы технического замещения можно получить, рассматривая условие: $dQ(R_i, R_j) = 0$. Следует учитывать, что поскольку при изменении комбинации факторов производства происходит изменение количеств обоих ресурсов, меняются их предельные продукты. Тогда должно выполняться условие

$$dQ(R_i, R_j) \approx MP_i \cdot \Delta R_i + MP_j \cdot \Delta R_j \approx 0. \qquad (1.9)$$

При бесконечно малых ΔR_i и ΔR_j в результате ряда преобразований получим пропорцию, в которой j-й фактор заменяет фактор i-го вида:

$$MRTS_{ji} = \frac{\Delta R_j}{\Delta R_i} = -\frac{MP_i(\cdot)}{MP_j(\cdot)} = -\frac{\partial Q(\cdot)/\partial R_i}{\partial Q(\cdot)/\partial R_j}. \qquad (1.10)$$

Предельная норма технического замещения является функцией двух факторов – количества заменяемого ресурса (R_i) и количества замещающего ресурса (R_j): $|MRTS_{ji}| = f(R_i, R_j)$. При этом $\frac{\partial f}{\partial R_i} < 0;$ $\frac{\partial f}{\partial R_j} > 0,$ т. е. $MRTS_{ji}$ по модулю – возрастающая функция количества заменяющего ресурса и убывающая функция количества заменяемого ресурса. Данное утверждение справедливо для случаев, когда комбинация факторов производства принадлежит экономической области.

Геометрически предельная норма технического замещения – тангенс угла наклона касательной к изокванте. Предельная норма технического замещения всегда отрицательна (изокванты имеют отрицательный наклон): объем использования одного из факторов уменьшается, количество другого увеличивается; потери в выпуске от сокращения объема одного фактора компенсируется увеличением выпуска за счет второго.

Проведение графического анализа карты изоквант осуществляется на основе технологий, предусматривающих использование не более двух варьируемых факторов производства ($m \le 2$).

Будем полагать, что фирма применяет два фактора производства – труд (L) и капитал (K). Объемы использования факторов могут изменяться. В этом случае производственная функция имеет вид $Q = F(L, K)$. Предельная норма технического замещения, характеризующая изокванты, $MRTS_{KL}$, показывает пропорцию замены капиталом труда.

Многообразие применяемых фирмами технологий и описывающих их производственных функций отмечалось выше. Рассмотрим основные виды производственных процессов и соответствующие им производственные функции и карты изоквант.

Производственный процесс, в котором ресурсы являются субститутами (заменителями) и существует бесконечное множество технологий (пропорций, в которых труд и капитал вводятся в производственный процесс), описывается функцией Кобба – Дугласа. Следует отметить, что труд и капитал являются несовершенными субститутами.

Частный случай производственной функции Кобба – Дугласа, описывающей процесс производства с применением двух факторов – труда (L) и капитала (K), имеет вид

$$Q = F(L, K) = A \cdot L^a \cdot K^b, \tag{1.11}$$

где A – общая факторная производительность (отдача от технологии); a и b – показатели технологической эффективности труда и капитала соответственно.

Необходимо отметить, что согласно рассмотренным выше требованиям к технологической эффективности комбинаций факторов [условия (1.7) и (1.8)] на показатели степени a и b должны быть наложены определенные ограничения: $0 < a < 1$; $0 < b < 1$. Данное требование обусловлено необходимостью учета действия закона убывающей предельной производительности факторов производства.

Графически изокванты представляют собой гиперболы, располагающиеся в первом квадранте. Схематичное представление изоквант (кривых равного продукта) для производственной функции Кобба – Дугласа приведено на рис. 1.4.

Наряду с ограничениями, налагаемыми на показатели степени – a и b, важным представляется и их соотношение. Соотношение $\frac{a}{b}$ определяет конфигурацию изоквант: (1) если $\frac{a}{b} = 1$, изокванты – равносторонние гиперболы; (2) если $\frac{a}{b} < 1$, изокванты – пологие гиперболы; (3) если $\frac{a}{b} > 1$, изокванты имеют вид крутых гипербол.

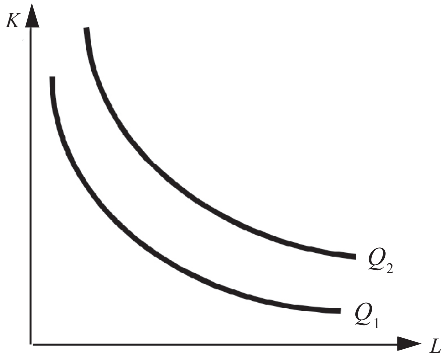

Рис. 1.4. Изокванты для производственной функции Кобба – Дугласа

Предельная норма технического замещения для производственного процесса, описываемого функцией типа Кобба – Дугласа, рассчитывается по формуле

$$MRTS_{KL} = \frac{\Delta K}{\Delta L} = -\frac{MP_L(\cdot)}{MP_K(\cdot)} = -\frac{\partial Q(\cdot)/\partial L}{\partial Q(\cdot)/\partial K} = -\frac{a}{b}\cdot\frac{K}{L}. \qquad (1.12)$$

На рис. 1.5 показаны величины $MRTS_{KL}$ для комбинации труда и капитала A (тангенс угла наклона касательной к изокванте в точке A – $\operatorname{tg}\alpha$) и $MRTS_{KL}$ для комбинации факторов B (тангенс угла наклона касательной к изокванте в точке B – $\operatorname{tg}\beta$). Комбинации факторов производства A и B обеспечивают выпуск на уровне Q^*.

Аддитивная производственная функция отражает технологии с использованием в производстве ресурсов, являющихся совершенными субститутами. Пропорций, в которых труд и капитал вводятся в производственный процесс (технологий), – бесконечное множество. При этом возможна полная двусторонняя заменяемость факторов производства, когда выпуск обеспечивается исключительно каким-то одним из них. Производственный процесс в данном случае описывается производственной функцией вида

$$Q(L, K) = A(aL + bK), \qquad (1.13)$$

где A – общая факторная производительность (отдача от технологии); параметр a – предельный продукт труда; параметр b – пре-

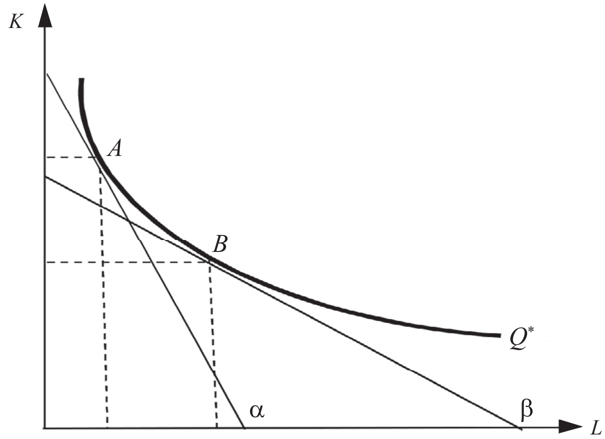

Рис. 1.5. Предельная норма технического замещения для производственной функции Кобба – Дугласа

дельный продукт капитала. Предельные продукты труда и капитала – положительные константы.

Изокванты имеют вид прямых с отрицательным наклоном. Наклон изоквант определяется соотношением $\frac{a}{b}$. Это соотношение – не что иное, как предельная норма технического замещения. Предельная норма технического замещения, $MRTS_{KL}$, является, таким образом, отрицательной константой. Закон убывающей предельной производительности в данном случае не выполняется, поэтому такую производственную функцию называют вырожденной. Конфигурация изоквант для аддитивной производственной функции схематично представлена на рис. 1.6.

Фирма может применять факторы производства, являющиеся комплементариями. То есть существует заданная пропорция использования факторов производства – единственная технология. Производственный процесс описывается функцией леонтьевского типа, имеющей вид

$$Q = A \cdot \min\{aL, bK\}, \qquad (1.14)$$

где A – общая факторная производительность (отдача от технологии); a и b – показатели технологической эффективности (предельные

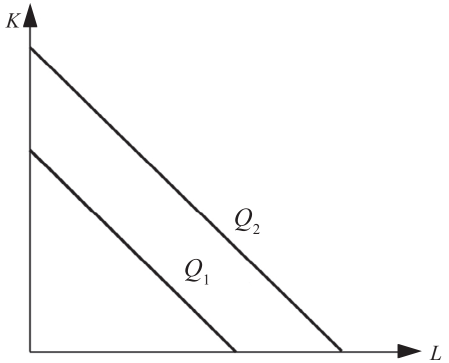

Рис. 1.6. Изокванты для аддитивной производственной функции

продукты) труда и капитала соответственно. Параметр a – предельный продукт труда, параметр b – предельный продукт капитала. Точки излома изоквант лежат на луче с положительным наклоном α. При этом $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$. Предельные продукты могут быть как константами, так и функциями количеств ресурсов (рис. 1.7).

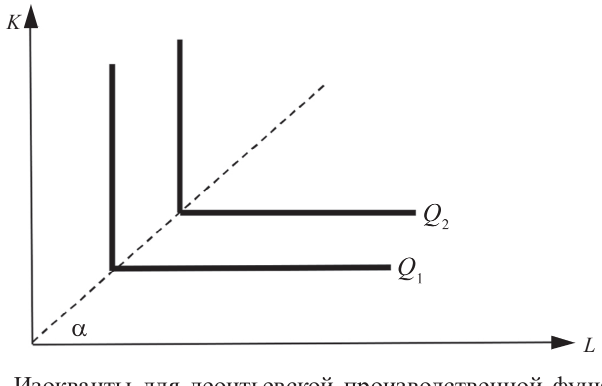

Рис. 1.7. Изокванты для леонтьевской производственной функции

С экономической точки зрения определение $MRTS_{KL}$ для леонтьевской производственной функции смысла не имеет, поскольку факторы производства дополняют друг друга и применяются в определенной пропорции.

В заключение рассмотрим производственные процессы, предполагающие возможность использования нескольких технологий и их комбинаций.

На рис. 1.8 представлена карта изоквант для случая, когда фирма может применять две технологии и линейно их комбинировать. Следует иметь в виду, что с точки зрения технологической эффективности комбинирование технологий не всегда оправдано. Применяемые технологии описываются двумя различными производственными функциями леонтьевского типа. Линейные комбинации технологий графически представляют собой отрезок, соединяющий точки излома изоквант для двух технологий. Изокванты имеют вид ломаных линий.

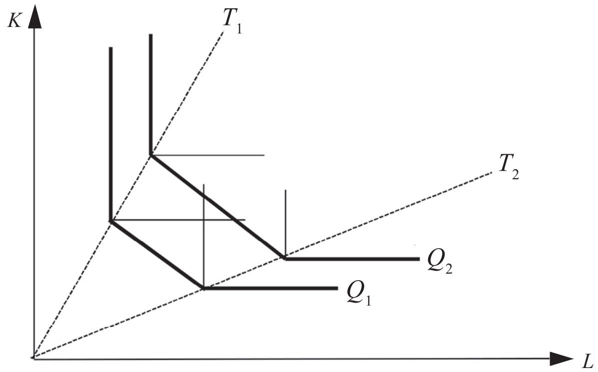

Рис. 1.8. Ломаные изокванты: использование двух технологий и их линейных комбинаций

Возможен и случай ограниченной субституции, когда факторы производства могут заменять друг друга внутри зоны субституции; вне этой зоны замена одного фактора другим невозможна. Зона субституции представляет собой совокупность интервалов, внутри которых варьируют объемы использования факторов производства: $L^* \le L \le L^{**}$; $K^* \le K \le K^{**}$. Изокванта, отображающая комбинации факторов производства для выпуска Q_1 с возможностью замены одного фактора другим внутри зоны субституции, представлена на рис. 1.9.

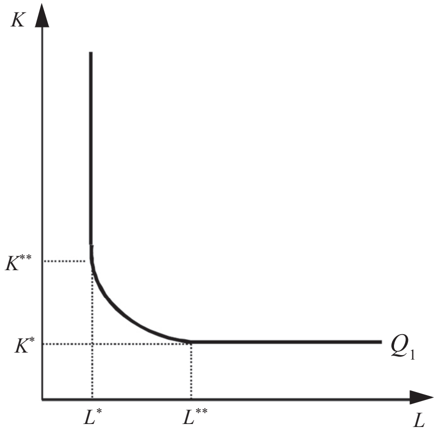

Рис. 1.9. Изокванта для случая ограниченной субституции

Итак, рассмотрены основные виды производственных функций и соответствующих им изоквант (кривых равного продукта). Приведенные примеры, безусловно, не исчерпывают всего разнообразия технологий, применяемых фирмами.

В рамках следующих подразделов будет освещено влияние на производственный процесс изменений, характерных для длительного периода. Речь пойдет об изменении масштаба производства и о последствиях технологических инноваций. В основу анализа положены решения фирмы, чей производственный процесс представи́м функцией Кобба – Дугласа, являющейся универсальным способом описания применяемых различными фирмами технологий.

1.5. Масштаб производства и отдача от масштаба

Временны́е интервалы, в которых фирма принимает решения, подразделяются на короткий и длительный периоды.

Короткий период – временной интервал, в рамках которого производитель (объективно) не может изменить объемы использования некоторых факторов производства. Эти факторы являются постоянными. В первую очередь, к постоянным факторам относятся элементы основного капитала (как активной, так и пассивной его части).

Длительный период – временной интервал, в рамках которого производитель имеет возможность варьировать затраты всех без исключения факторов производства, в том числе – элементов основного капитала. Наряду с этим к особенностям производственного процесса в длительном периоде относят возможность варьирования масштаба производства и изменения в производстве, обусловленные внедрением технологических инноваций.

В длительном периоде проявляется специфический эффект – эффект масштаба.

Под эффектом масштаба понимается изменение объема выпуска вследствие пропорционального изменения затрат всех ресурсов.

Коэффициент, в соответствии с которым происходит изменение затрат ресурсов, носит название масштаб производства (ω).

Как и любой другой фактор производства, масштаб производства характеризуется производительностью, или отдачей.

Отдача от масштаба (Ω) – коэффициент, который показывает, как изменился объем выпуска вследствие изменения масштаба производства.

Производственные функции, улавливающие эффект масштаба, называются однородными производственными функциями определенной степени.

Однородные производственные функции степени k имеют вид

$$Q = F(\omega\overline{R}) = \omega^k \cdot F(\overline{R}), \qquad (1.15)$$

где $\Omega = \omega^k$, $k > 0$.

Различают три типа отдачи от масштаба: отдачу возрастающую, постоянную и убывающую.

Возрастающая отдача от масштаба (*increasing returns to scale – IRS*) означает, что выпуск меняется в большей пропорции, чем затраты факторов производства: $\Omega > \omega$, производственный процесс описывается однородной функцией степени $k > 1$.

Постоянная отдача от масштаба (*constant returns to scale* – *CRS*) характеризует положение, когда выпуск и затраты факторов изменяются в одинаковой пропорции: $\Omega = \omega$, производственный процесс описывается однородной функцией степени $k = 1$.

Убывающая отдача от масштаба (*decreasing returns to scale* – *DRS*) имеет место в случае, когда пропорция изменения выпуска меньше пропорции, в которой изменяются затраты ресурсов: $\Omega < \omega$; производство описывается однородной функцией степени $k < 1$.

Следует иметь в виду, что в действительности тип отдачи от масштаба в отрасли присутствия фирмы меняется: при небольших объемах выпуска отдача от масштаба растет; при значительных объемах выпуска отдача от масштаба снижается. Возможна ситуация, когда при «средних» объемах выпуска отдача от масштаба постоянна.

На рис. 1.10 представлена изменяющаяся динамика предельной производительности (отдачи от масштаба) – MP_ω: $MP_\omega = \dfrac{\partial\Omega}{\partial\omega}$. По мере увеличения масштаба производства отдача от масштаба увеличивается, затем она становится постоянной; дальнейшее увеличение масштаба производства приводит к снижению отдачи.

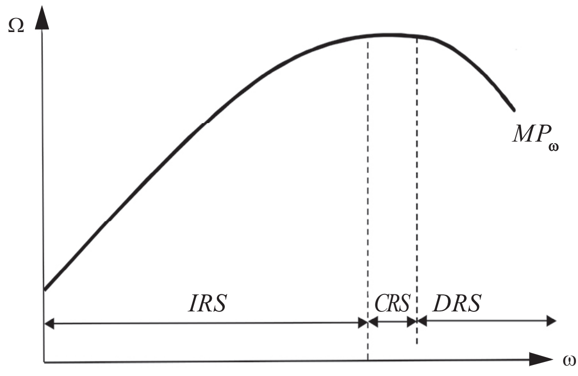

Рис. 1.10. Динамика производительности (отдачи от масштаба); $\dfrac{K}{L} = \text{const}$

Тип отдачи от масштаба определяет также «плотность» карты изоквант: чем выше степень k, тем плотнее располагаются кривые равного продукта с кратным выпуском (или с одинаковым приращением выпуска).

Предположим, фирма использует комбинацию факторов производства с определенным составом (L_1, K_1) и структурой $\left(\frac{K}{L} = \frac{K_1}{L_1} = \text{const}\right)$ и обеспечивает при этом выпуск Q_1. Тогда, при пропорциональном изменении затрат всех факторов производства, она, сохраняя структуру комбинаций применяемых факторов $\left(\frac{K_2}{L_2} = \frac{K}{L} = \text{const}\right)$, будет иметь выпуск $Q_2 = F(L_2, K_2) = F(\omega L_1, \omega K_1) = \Omega Q_1$.

Далее покажем, как изменение масштаба влияет на расположение изоквант с кратным выпуском (например, $Q_2 = 2Q_1$; $Q_3 = 3Q_1$).

Если в отрасли присутствия фирмы наблюдается возрастающая отдача от масштаба, для удвоения выпуска потребуется увеличить затраты труда и капитала менее чем в 2 раза, а при увеличении выпуска в 3 раза – менее чем в 3 раза. Или, иначе: увеличение затрат труда и капитала в 2 (3) раза обеспечит увеличение выпуска более чем в 2 (3) раза. Изокванты с кратным выпуском располагаются – при увеличении выпуска – все ближе друг к другу. Таким образом, имеем «плотную» карту изоквант. На рис. 1.11 представлена такого рода карта изоквант. Не составляет труда увидеть, что $L_2 < 2L_1$; $L_3 < 3L_1$ и $K_2 < 2K_1$; $K_3 < 3K_1$.

Если в отрасли присутствия фирмы отдача от масштаба постоянна, для удвоения выпуска потребуется увеличить затраты труда и капитала в 2 раза, а при увеличении выпуска в 3 раза – в 3 раза. Или, иначе: увеличение затрат труда и капитала в 2 (3) раза обеспечит увеличение выпуска в 2 (3) раза. Изокванты с кратным выпуском располагаются – при увеличении выпуска – на одинаковом расстоянии друг от друга; имеем «равномерную» карту изоквант (рис. 1.12). Затраты факторов производства для обеспечения удвоенного и утроенного выпусков, соответственно, по труду – $L_2 = 2L_1$ и $L_3 = 3L_1$; по капиталу – $K_2 = 2K_1$ и $K_3 = 3K_1$.

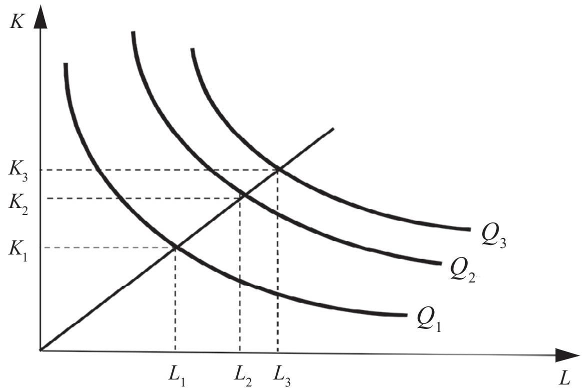

Рис. 1.11. Карта изоквант для случая возрастающей отдачи от масштаба

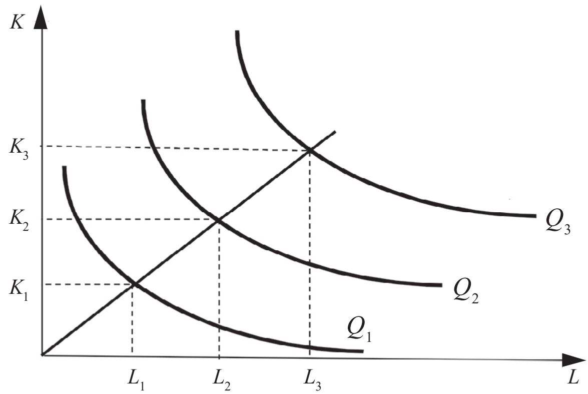

Рис. 1.12. Карта изоквант для случая постоянной отдачи от масштаба

Если в отрасли присутствия фирмы наблюдается убывающая отдача от масштаба, для удвоения выпуска потребуется увеличить затраты труда и капитала более чем в 2 раза, а при увеличении выпуска в 3 раза – более чем в 3 раза. Или, иначе: увеличение затрат труда и капитала в 2 (3) раза обеспечит увеличение выпуска менее чем в 2 (3) раза. Изокванты с кратным выпуском располагаются – при увеличении выпуска – все дальше друг от друга; имеем «разреженную» карту изоквант. На рис. 1.13 представлена такого рода карта изоквант. Соотношение затрат факторов: по труду – $L_2 > 2L_1$ и $L_3 > 3L_1$; по капиталу – $K_2 > 2K_1$ и $K_3 > 3K_1$.

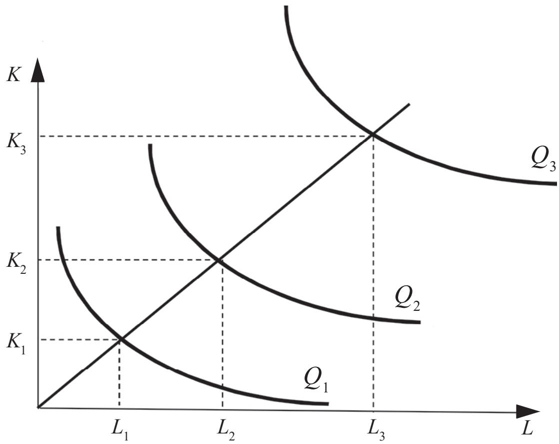

Рис. 1.13. Карта изоквант для случая убывающей отдачи от масштаба

В некоторых случаях варьировать масштаб производства не представляется возможным; пропорции вводимых в производство ресурсов меняются по-разному, и нельзя определить отдачу от масштаба. Однако имеют место либо *экономия от масштаба*, либо *потери от масштаба*. Экономия от масштаба предполагает при увеличении выпуска более медленный рост производственных затрат. Потери от масштаба обнаруживаются, когда затраты на производство растут быстрее, чем выпуск.

1.6. Влияние технического прогресса на производственный процесс

В длительном периоде в производство внедряются достижения науки и техники, осуществляются инновации, которые принято подразделять на продуктовые и технологические.

Технологические инновации – плод технического прогресса, в результате которого производительность факторов производства может изменяться по-разному. В соответствии с этим выделяют три типа технического прогресса: нейтральный; трудосберегающий, или капиталоинтенсивный; капиталосберегающий, или трудоинтенсивный.

Технологические инновации обусловливают: рост общей факторной производительности (*total factor productivity – TFP*), т. е. рост отдачи от технологии; рост производительности труда (при любом типе технического прогресса); уменьшение затрат факторов производства для обеспечения выпуска на определенном уровне.

Влияние технического прогресса на отдачу от технологии (рост общей факторной производительности) продемонстрируем через изменение общего продукта труда (TP_L). Технологические инновации обусловливают сдвиг вверх и изменение конфигурации линии TP_L. Кроме того, смещаются вправо точки перегиба линии TP_L и расширяются границы применения фактора «труд» при неизменном объеме использования фактора «капитал». На рис. 1.14 представлены линии общего продукта труда до (TP_L) и после ($\widetilde{TP}_L$) технологических инноваций.

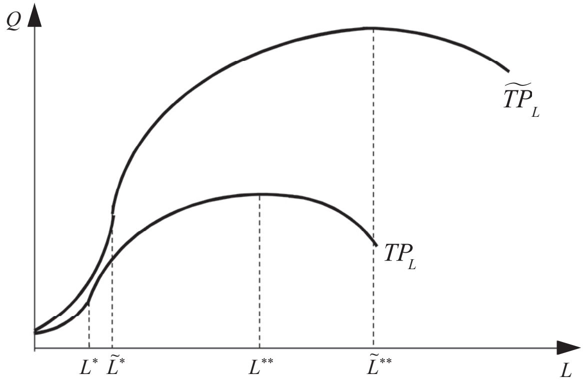

Рис. 1.14. Изменение общего продукта труда в результате технологических инноваций

Также технологические инновации приводят к изменению карты кривых равного продукта: изокванты для соответствующих выпусков смещаются к началу координат (что свидетельствует об уменьшении производственных затрат – затрат труда и капитала); меняется конфигурация изоквант.

Технический прогресс обусловливает рост производительности всех используемых факторов производства. Если до внедрения технологических инноваций производственная функция имеет вид $Q = A_1L^aK^b$, то после – $\widetilde{Q} = A_2L^{\alpha}K^{\beta}$, где $A_2 > A_1$, $\alpha > a$, $\beta > b$.

Технический прогресс нейтрального типа обеспечивает пропорциональный рост производительности всех используемых факторов производства. Это означает, что $\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} > 1$. Последствия технологических инноваций такого типа для конфигурации изоквант отражены на рис. 1.15. Новая карта изоквант представлена прерывистыми линиями, которые параллельно смещены к началу координат. Наклон изоквант не меняется.

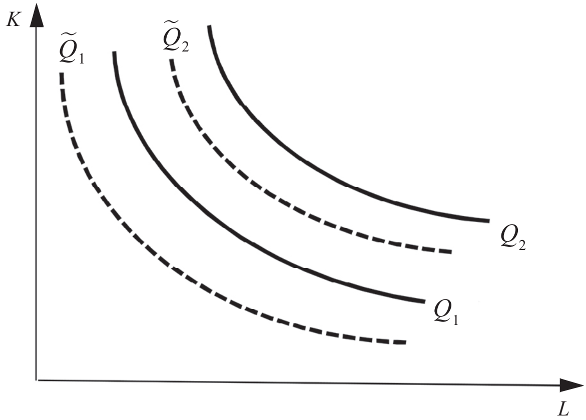

Рис. 1.15. Влияние на конфигурацию изоквант технического прогресса нейтрального типа

Капиталоинтенсивный (трудосберегающий) технический прогресс приводит к более ощутимому росту производительности капитала. Производственная функция меняется так, что $\frac{\beta}{b} > \frac{\alpha}{a}$. Следовательно изокванты, сдвигаясь к началу координат, становятся более пологими. Последствия технологических инноваций такого типа для конфигурации изоквант представлены на рис. 1.16.

Трудоинтенсивный (капиталосберегающий) технический прогресс приводит к более ощутимому росту производительности

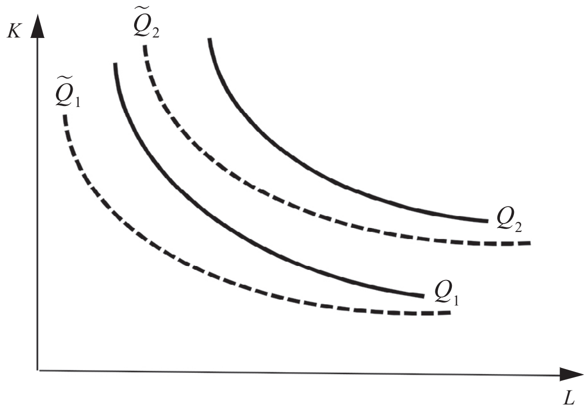

Рис. 1.16. Влияние на конфигурацию изоквант технического прогресса капиталоинтенсивного (трудосберегающего) типа

труда. Производственная функция меняется так, что $\frac{\alpha}{a} > \frac{\beta}{b}$. Следовательно изокванты, сдвигаясь к началу координат, становятся более крутыми. Последствия технологических инноваций такого типа для конфигурации изоквант представлены на рис. 1.17.

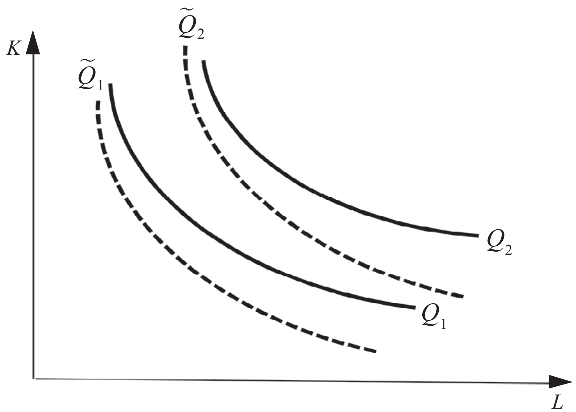

Рис. 1.17. Влияние на конфигурацию изоквант технического прогресса трудоинтенсивного (капиталосберегающего) типа

Технический прогресс – «дорогое удовольствие». Во-первых, для разработки инноваций и их внедрения в производство необходимы значительные расходы на НИОКР. Во-вторых, требуются дополнительные затраты на переподготовку и повышение квалификации персонала. Как следствие, формируются две противоборствующие тенденции. С одной стороны, внедрение технологических инноваций обеспечивает последующее снижение производственных затрат и снижение издержек производства, а значит, повышение экономической эффективности фирмы, приобретение ею дополнительных конкурентных преимуществ. С другой стороны, сохранение старой технологии, отсутствие инноваций и связанных с ними дополнительных расходов позволяют поддерживать текущие производственные затраты на прежнем уровне, не приводят к росту краткосрочных издержек. Однако в этом случае будет наблюдаться снижение экономической эффективности фирмы в долгосрочном периоде, фирма упускает возможность приобретения конкурентных преимуществ (преимуществ в издержках).

Таким образом, первая тенденция обеспечивает конкурентоспособность продукции фирмы в длительном периоде. Вторая тенденция обусловливает ориентацию фирмы на извлечение краткосрочной прибыли и чревата потерей конкурентоспособности в длительном периоде.

Типовые задания с решениями и ответами

Задание 1.1

Фирма использует в производстве несколько постоянных факторов производства и один переменный. Покажите на графике динамику общего, среднего и предельного продуктов переменного фактора для случаев, когда отдача от переменного фактора:

(*а*) неизменна;

(*б*) изначально снижается;

(*в*) перманентно возрастает.

Решения и ответы

Производственная функция фирмы имеет вид $Q = f(\overline{R}_1, \overline{R}_2, ..., \overline{R}_{m-1}, R_m)$, где все факторы, кроме фактора вида m, – постоянны. Для простоты модифицируем производственную функцию, приведя ее к виду $Q = \psi(R_m)$.

Тогда:

– общий продукт переменного фактора – $TP_m = \psi(R_m)$;

– средний продукт переменного фактора – $AP_m = \dfrac{\psi(R_m)}{R_m}$;

– предельный продукт переменного фактора – $MP_m = \dfrac{\partial\psi(\cdot)}{\partial R_m}$.

Динамика общего, среднего и предельного продуктов взаимосвязана.

(*а*) Поскольку предельный продукт переменного фактора неизменен, а его величина $MP_m = a$, общий продукт фактора – линейная функция затрат этого фактора: $TP_m = a \cdot R_m$. Следовательно средний продукт переменного фактора $AP_m = \dfrac{a \cdot R_m}{R_m} = a$.

Графически функции общего, среднего и предельного продуктов переменного фактора m выглядят так, как это показано на рис. 1.18.

(*б*) Изначально убывающая отдача переменного фактора предопределяет снижение предельного продукта этого фактора по мере введения его в производственный процесс.

Средний продукт переменного фактора также убывает, но медленнее, чем предельный продукт.

Поскольку предельный продукт переменного фактора положителен, его общий продукт возрастает по мере увеличения объема использования фактора. Рост общего продукта происходит все медленнее с ростом объема переменного фактора в производственном процессе.

Функции общего, среднего и предельного продуктов переменного фактора m представлены на рис. 1.19.

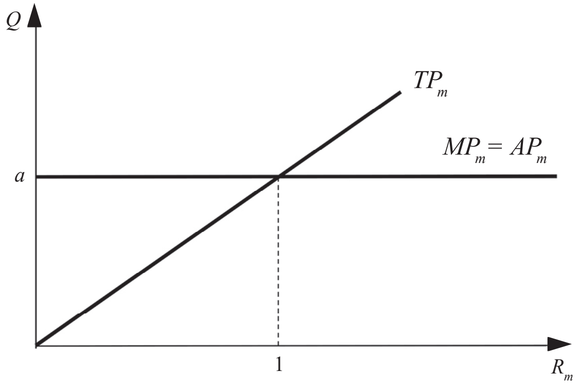

Рис. 1.18. Динамика общего, среднего и предельного продуктов переменного фактора при неизменной его отдаче

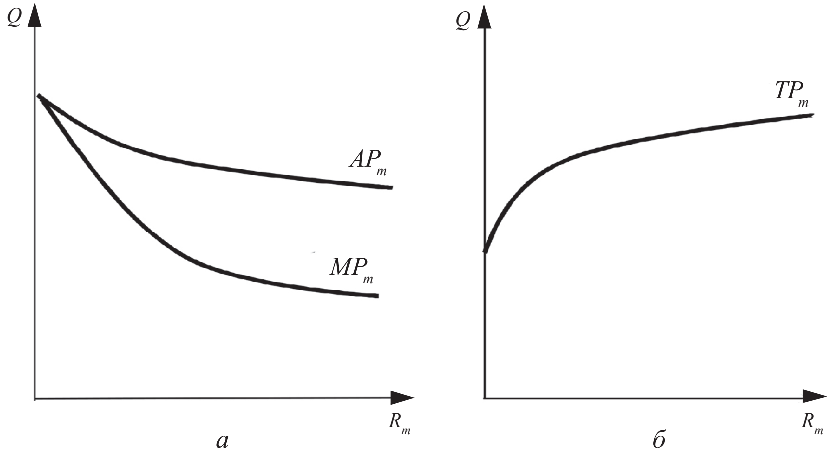

Рис. 1.19. Динамика среднего и предельного (*а*) и общего (*б*) продуктов переменного фактора при убывающей его отдаче

(*в*) При небольших объемах использования переменного фактора и отсутствии наблюдений за отдачей от фактора при значительных объемах его включения в производственный процесс возможна ситуация, описанная в данном пункте задания: предельный продукт переменного фактора изначально растет, иной динамики не наблюдается.

Средний продукт переменного фактора в этом случае также растет, но медленнее, чем предельный продукт.

Поскольку предельный продукт переменного фактора положителен и возрастает, его общий продукт по мере увеличения объема использования данного фактора возрастает более высоким темпом, чем темп увеличения затрат фактора.

Функции общего, среднего и предельного продуктов переменного фактора *m* представлены на рис. 1.20.

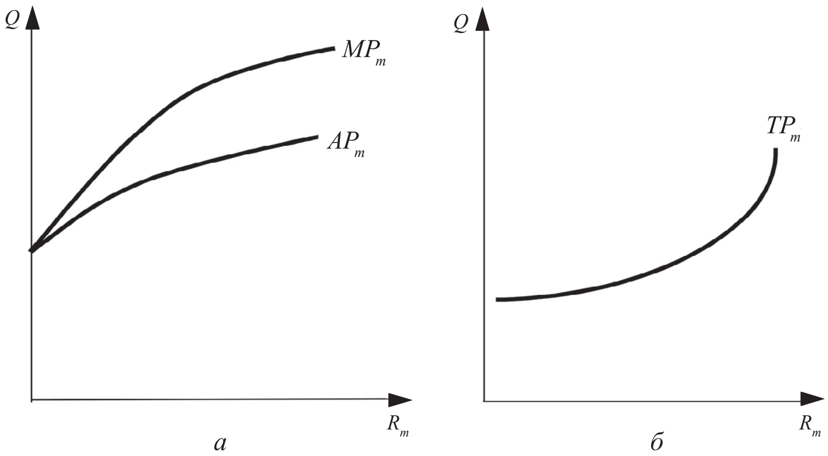

Рис. 1.20. Динамика среднего и предельного (*а*) и общего (*б*) продуктов переменного фактора при возрастающей его отдаче

Задание 1.2

Докажите, что в случае изменяющейся динамики отдачи от переменного фактора производства его средний продукт максимален при равенстве предельному продукту этого фактора.

Решение и ответ

Выпишем функцию среднего продукта переменного фактора:

$$AP_v = \frac{TP_v(\overline{\tilde{R}}, R_v)}{R_v} \equiv \frac{TP_v(R_v)}{R_v}. \quad (1)$$

Пусть объем использования переменного фактора, обеспечивающего выполнение условия первого порядка (*the first order condition – FOC*) – $\widetilde{R_v}$. В соответствии с *FOC* функция достигает экстремума, если ее первая производная равна нулю. Тогда

$$\frac{\partial AP_v(\cdot)}{\partial R_v} = \frac{\partial TP_v(\cdot)}{\partial R_v} \cdot \frac{1}{R_v} + TP_v \cdot (-1) \cdot \frac{1}{R_v^2} =$$

$$= \frac{1}{R_v} \cdot \left[\frac{\partial TP_v(\cdot)}{\partial R_v} - \frac{TP_v(\cdot)}{R_v} \right] = 0. \qquad (2)$$

Поскольку $\frac{1}{R_v} \neq 0$, $\left[\frac{\partial TP_v(\cdot)}{\partial R_v} - \frac{TP_v(\cdot)}{R_v} \right] = 0$.

Вспомним, что $\frac{\partial TP_v(\cdot)}{\partial R_v} = MP_v(\cdot)$ и $\frac{TP_v(\cdot)}{R_v} = AP_v(\cdot)$. Тогда в экстремуме выполняется балансовое уравнение вида

$$AP_v(\cdot) = MP_v(\cdot) \text{ или } AP_v(\widetilde{R_v}) = MP_v(\widetilde{R_v}). \qquad (3)$$

Поскольку и MP_v, и AP_v возрастают, а затем начинают убывать по R_v, экстремум функции среднего продукта переменного фактора – его максимум.

Таким образом, из балансового уравнения (3) следует, что в точке максимума AP_v равен MP_v, что и требовалось доказать.

Задание 1.3

Производственная функция фирмы имеет вид $Q(L, K) = \mathrm{A}L^aK^b$. Какими должны быть показатели степени (параметры a и b), чтобы производственная функция отражала действие закона убывающей предельной производительности применяемых факторов производства?

Решение и ответ

Необходимость учета действия закона убывающей предельной производительности налагает определенные условия на показатели степени в производственной функции полезности Кобба – Дугласа, а именно: $0 < a, b < 1$.

Докажем это утверждение.

Функции предельных продуктов факторов производства имеют следующий вид: $MP_L(L, K) = \frac{\partial Q(\cdot)}{\partial L} = aAL^{a-1}K^b$; $MP_K(L, K) = \frac{\partial Q(\cdot)}{\partial L} =$ $= bAL^aK^{b-1}$. Значения функций предельного продукта труда и капитала положительны при условии a, $b > 0$.

Выполнение закона убывающей предельной производительности требует, чтобы первые производные функций предельного продукта (или, иначе, вторые производные производственной функции) были отрицательны.

Для фактора «труд» $\frac{\partial^2 Q(\cdot)}{\partial L^2} = \frac{\partial MP_L(\cdot)}{\partial L} = a(a-1)AL^{a-2}K^b < 0$. Указанное требование выполняется, если $(a - 1) < 0$. Следовательно $a < 1$.

Для фактора «капитал» $\frac{\partial^2 Q(\cdot)}{\partial K^2} = \frac{\partial MP_K(\cdot)}{\partial K} = b(b-1)AL^aK^{b-2} < 0$. Указанное требование будет выполнено, если $(b - 1) < 0$. Следовательно $b < 1$.

Ответ: показатели степени в производственной функции Кобба – Дугласа должны удовлетворять условиям $0 < a < 1$; $0 < b < 1$.

Задание 1.4

Производственный процесс фирмы описывается функцией полезности Кобба – Дугласа. Комбинации факторов производства включают k видов ресурсов. Доказать, что предельная норма технического замещения j-м фактором i-го фактора ($MRTS_{ji}$) является функцией количеств только двух ресурсов: R_i и R_j.

Решение и ответ

Производственная функция Кобба – Дугласа для случая использования k видов факторов производства имеет вид $Q(R_1, R_2, ..., R_k) =$ $= A \cdot \prod_{i=1}^{k} R_i^{a_i}$. По определению, предельная норма технического замещения j-м фактором i-го фактора определяется как

$$MRTS_{ji} = \frac{\Delta R_j}{\Delta R_i} = -\frac{MP_i(\cdot)}{MP_j(\cdot)}. \quad (1)$$

Для удобства преобразуем производственную функцию и запишем ее в следующем виде:

$$Q(R_1, R_2, ..., R_k) = A \cdot \prod_{i=1}^{k} R_i^{a_i} = R_i^{a_i} R_j^{a_j} \cdot A \cdot \prod_{m=1}^{k} R_m^{a_m} = M \cdot R_i^{a_i} R_j^{a_j},$$

где $m \neq i$, $m \neq j$, а константа M может быть представлена следующим образом: $M = A \cdot \prod_{m=1}^{k} R_m^{a_m}$. Продифференцируем эту функцию по R_i и по R_j, чтобы получить функции предельных продуктов факторов производства:

$$MP_i(\cdot) = a_i \cdot F \cdot R_i^{a_i - 1} R_j^{a_j}; \quad (2)$$

$$MP_j(\cdot) = a_j \cdot F \cdot R_i^{a_i} R_j^{a_j - 1}. \quad (3)$$

Подставим функции (2) и (3) в формулу (1). Получим:

$$MPTS_{ji} = -\frac{MP_i(\cdot)}{MP_j(\cdot)} = -\frac{a_i \cdot F \cdot R_i^{a_i - 1} R_j^{a_j}}{a_j \cdot F \cdot R_i^{a_i} R_j^{a_j - 1}} = -\frac{a_i R_j}{a_j R_i} = \varphi(R_i, R_j). \quad (4)$$

Из формулы (4) следует, что $MRTS_{ji}$ является функций двух переменных – количества *j*-го фактора производства и количества фактора производства *i*-го вида, что и требовалось доказать.

Задание 1.5

Некая фирма использует в производстве технологии, которые описываются производственной функцией вида

$$Q(L, K) = 4\ 000 - [(20 - L)^2 + (20 - K)^2].$$

Необходимо:

(*а*) изобразить карту изоквант для данной фирмы;

(*б*) определить экономическую область (совокупность технологически эффективных комбинаций факторов производства).

Решения и ответы

(*а*) Изокванты для данной фирмы будут иметь форму концентрических окружностей. Центр карты изоквант – точка с координатами (20; 20) – отражает максимально возможный объем выпуска: $Q_{\max} = 4\ 000$.

Такого рода ситуация может сложиться в случае, когда наряду с варьируемыми трудом и капиталом имеется постоянный фактор – производственные площади, например.

Карта изоквант для фирмы представлена на рис. 1.21. Положительный квадрант, содержащий изокванты, поделен, в свою очередь, на условные квадранты, в каждом из которых изокванты имеют различную конфигурацию.

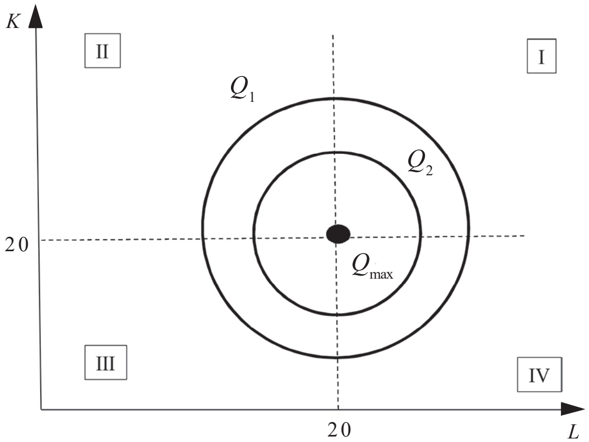

Рис. 1.21. Карта изоквант для фирмы с производственной функцией вида $Q(L, K) = 4\ 000 - [(20 - L)^2 + (20 - K)^2]$

(*б*) Комбинации факторов, включаемые в экономическую область, т. е. технологически эффективные комбинации, должны отвечать требованиям, отображенным в формулах (1.7) и (1.8).

Экономическая область представляет собой совокупность комбинаций факторов производства, расположенную на рис. 1.21 в условном квадранте III.

Границы применения фактора «труд»:

$$0 \le L \le 20.$$

Границы применения фактора «капитал»:

$$0 \le K \le 20.$$

Задание 1.6

Необходимо определить, характеризуются ли следующие производственные функции убывающей, постоянной или возрастающей отдачей от масштаба:

(*а*) $Q = 0{,}5(KL)^{0{,}5}$;

(*б*) $Q = 2K + 3L$;

(*в*) $Q = (K^2L)^{0{,}25}$;

(*г*) $Q = (KL)^{0{,}75}$;

(*д*) $Q = (KL)^{1/4}$;

(*е*) $Q = K^{1/2} + L^{1/4}$;

(*ж*) $Q = 2K^{1/4} + 3L^{1/4}$;

(*з*) $Q = \min\{2L; 3K\}$?

Решения и ответы

Фирма, действующая в рамках длительного периода, может изменять затраты всех факторов. Кроме того, фирма может изменять масштаб производства.

Масштаб производства улавливают однородные производственные функции. При этом степень t однородной функции показывает тип отдачи от масштаба: убывающую при $0 < t < 1$; постоянную при $t = 1$; возрастающую при $t > 1$ (подробно данный материал рассмотрен в подразделе 1.5).

Анализ представленных производственных функций показывает, что однородными, т. е. улавливающими масштаб производства являются все функции, кроме представленной в пункте (*е*). Фирма, чья производственная функция представлена в пункте (*е*), не может изменять масштаб производства.

Однородность первой степени характерна для функций, указанных в пунктах (*а*), (*б*) и (*з*). Производственные функции, представленные в этих пунктах, отражают постоянную отдачу от масштаба.

Производственная функция, приведенная в пункте (*г*), является однородной. Степень однородности: $t = 0{,}75 + 0{,}75 = 1{,}5 > 1$. Следовательно фирма с такой производственной функцией действует в отрасли с возрастающей отдачей от масштаба.

Производственные функции, представленные в пунктах (*в*), (*д*) и (*ж*), имеют степень однородности $t < 1$. Для отраслей присутствия фирм из указанных пунктов характерна убывающая отдача от масштаба.

Задание 1.7

Производственный процесс фирмы описывается функцией Кобба – Дугласа вида $Q = L^{\alpha}K^{\beta}$; $\alpha = \beta$; $\alpha + \beta < 1$. Цены используемых фирмой ресурсов одинаковы. Внедрение фирмой технологических инноваций привело к росту производительности капитала – в 2 раза, а производительности труда – в 1,25 раза. Конъюнктура рынков факторов производства не изменилась. Какой тип технического прогресса обусловил технологические инновации фирмы?

Решение и ответ

Поскольку производительность труда выросла в меньшей степени, чем производительность капитала, фирма использовала для технологических инноваций капиталоинтенсивный (трудосберегающий) тип технического прогресса.

В результате инноваций карта изоквант изменится таким образом, что кривые равного продукта сместятся к началу координат и станут более пологими.

2. ДЕНЕЖНАЯ ОЦЕНКА РЕЗУЛЬТАТОВ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ФИРМЫ

Генеральной целью деятельности фирмы является максимизация общей прибыли. Способом получения прибыли выступает выпуск и реализация продукта. Прибыль – это разница между доходом (выручкой от реализации) и понесенными издержками, т. е. категория денежная. Для определения величины прибыли, таким образом, необходимо представить результаты деятельности и затраты в единых единицах измерения – в денежных единицах. В данной главе речь пойдет о денежной оценке результатов производственной деятельности. На рис. 2.1 представлена модель фирмы как «черного ящика» с характеристиками цели и деятельности в сфере обмена: «вход», охарактеризованный в денежной форме, – это денежная оценка затрат, или общие издержки (*total costs* – *TC*); «выход» – денежная оценка результата деятельности, общий доход (*total revenue* – *TR*). Прямая связь между результатом и затратами улавливается через функции общего дохода и общей прибыли (*total profit* – *T*π), аргументом которых является объем выпуска (*Q*), зависящий от производственных затрат; обратная связь – зависимость затрат от результата деятельности – через функцию издержек, также имеющую в качестве аргумента объем выпуска.

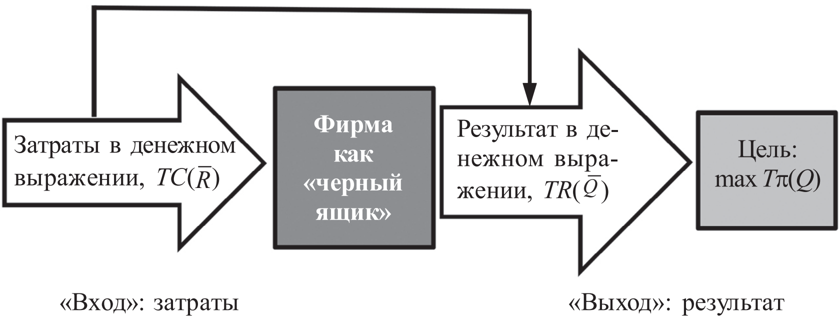

Рис. 2.1. Денежная характеристика цели, результатов и затрат фирмы

2.1. Доходы фирмы: сущность, виды, функциональные зависимости

Результаты деятельности фирмы могут быть представлены не только в натурально-вещественных единицах, но и в денежных. Результаты деятельности в натуральном выражении были рассмотрены в главе 1 и охарактеризованы в терминах «выпуск», Q. Результаты деятельности фирмы в денежной форме характеризуются следующими категориями: общий доход (*total revenue* – TR), средний доход (*average revenue* – AR), предельный доход (*marginal revenue* – MR). Категории дохода – функции объема выпуска.

Общий доход – $TR(Q)$ – денежная оценка (всего) выпуска. Для однопродуктовых фирм общий доход – объем выпуска, умноженный на цену: $TR(Q) = p \cdot Q$; для многопродуктовых – сумма произведений цен и объемов по всем позициям номенклатуры выпускаемых продуктов: $\bar{Q} = (Q_1, Q_2, ..., Q_k), k \leq n$:

$$TR(\bar{Q}) = \sum_{i=1}^{k} p_i \cdot Q_i. \qquad (2.1)$$

Необходимо отметить, что понятия «общий доход» и «выручка от реализации» не тождественны. Выручка от реализации – сумма денег, полученная от продажи определенного объема (который зачастую не совпадает с объемом выпуска), тогда как общий доход – сумма денег, измеряющая весь объем выпуска, т. е. гипотетическая выручка. Количественные несовпадения объясняются тем, что объем реализации и объем выпуска не всегда равны. Объем продаж может превышать объем выпуска, если фирма изымает готовую продукцию со склада. Объем выпуска может превышать объем реализации, когда не все единицы продукта удалось продать. Если принять упрощающую предпосылку об отсутствии товарно-материальных запасов в виде готовой продукции, а значит, о совпадении объемов выпуска с объемами реализации, получим количественное совпадение. Такого рода предпосылка, как правило, принимается при построении микроэкономических моделей.

С р е д н и й   д о х о д – $AR(Q)$ – доход, приносимый каждой выпущенной единицей продукта. Величина среднего дохода[12] может быть получена посредством деления общего дохода на объем выпуска:

$$AR = \frac{TR(Q)}{Q} = \frac{p \cdot Q}{Q} = p. \tag{2.2}$$

П р е д е л ь н ы й   д о х о д – $MR(Q)$ – денежная оценка результата деятельности фирмы, обеспечиваемого дополнительной единицей выпуска, или доход, приносимый последней единицей выпуска. Величина предельного дохода для дискретной производственной функции определяется по формуле

$$MR(Q) = TR(Q) - TR(Q - 1), \tag{2.3}$$

а для непрерывной производственной функции – по формуле

$$MR(Q) = \frac{\partial TR(Q)}{\partial Q}. \tag{2.4}$$

Рассмотрев сущность категорий, характеризующих результат деятельности фирмы в денежной форме, перейдем к анализу их динамики.

2.2. Динамика общего, среднего и предельного дохода

На деятельность фирмы в сфере обмена и на величину общего, среднего и предельного дохода фирмы оказывают влияние рыночные ограничения, в частности ограничения со стороны конкурентов. На рынках с большим количеством игроков и однородным продуктом фирмы не имеют возможности влиять на рыночную цену. Следовательно любая фирма – ценополучатель (*price-taker*). Фирма реагирует на цену, сложившуюся на рынке, как на данность.

---

[12] Величина и тип зависимости среднего дохода от объема выпуска определяются рыночными ограничениями со стороны конкурентов (типом рыночной структуры). Влияние этого рода ограничений будет обсуждаться в рамках подраздела 2.2.

Решения об объеме выпуска принимаются исходя из сложившейся рыночной конъюнктуры. Иначе: параметр «цена» для фирмы – параметр экзогенный.

Тогда общий доход – это линейная функция объема выпуска; величина среднего дохода – $AR = p_e = \text{const}$; $MR = p_e = \text{const}$, где p_e – равновесная рыночная цена. Динамика показателей дохода для конкурентной фирмы представлена на рис. 2.2. Тангенс угла наклона линии $TR(Q)$ зависит от уровня равновесной цены: $\text{tg}\ \alpha = p_e$. Линии AR и MR горизонтальны и совпадают с линией рыночной цены.

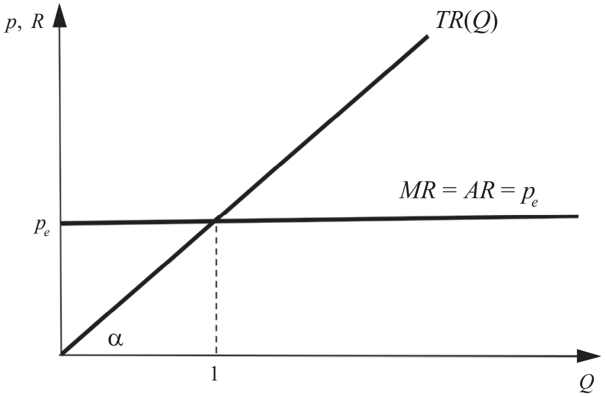

Рис. 2.2. Динамика предельного, среднего и общего дохода конкурентной фирмы

Поскольку рыночная конъюнктура может измениться, поменяется и динамика показателей дохода. На рис. 2.3 показаны изменения в величинах общего, среднего и предельного дохода, возникшие в результате снижения рыночной цены с p_1 до p_2.

Линии AR и MR вследствие снижения цены сместились параллельно вниз; линия TR стала более пологой. Наклон линии TR_1 (α) определяется начальной ценой: $\text{tg}\ \alpha = p_1$; наклон линии TR_2 (β) – новым уровнем цены: $\text{tg}\ \beta = p_2$.

На рынках с ограниченным количеством игроков (и/или с дифференцированным продуктом) у каждого участника появляется

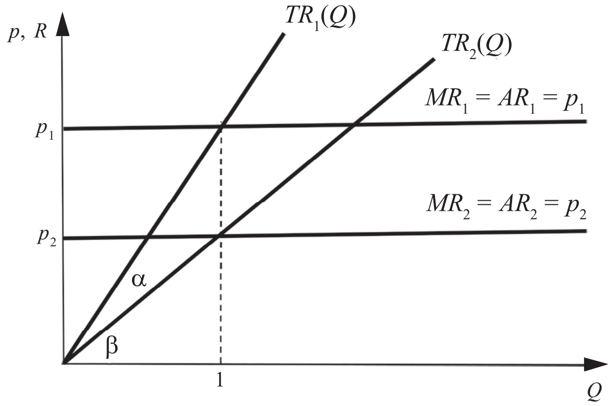

Рис. 2.3. Влияние рыночной конъюнктуры
на предельный, средний и общий доход конкурентной фирмы

возможность влияния на цену. Фирма становится прайс-мейкером (*price-maker*), а цена – эндогенным параметром принятия решений об объеме выпуска. Следствием этого является кардинальное изменение зависимостей общего, среднего и предельного дохода от объема выпуска:

$$TR(Q) = p(Q) \cdot Q; \tag{2.5}$$

$$AR(Q) = \frac{p(Q) \cdot Q}{Q} = p(Q); \tag{2.6}$$

$$MR(Q) = \frac{\partial TR(Q)}{\partial Q} = \frac{\partial \left[p(Q) \cdot Q \right]}{\partial Q} = p(Q) \cdot \left[1 + \frac{1}{E_p^Q} \right], \tag{2.7}$$

где E_p^Q – ценовая эластичность спроса на продукцию фирмы.

Динамика показателей дохода неконкурентной фирмы, сталкивающейся на рынке с линейной функцией спроса вида $D = b - ap$, приведена на рис. 2.4.

Таким образом, выявлена сущность, представлены функции и динамика денежных показателей выпуска. Затратной стороне деятельности фирмы посвящена глава 3.

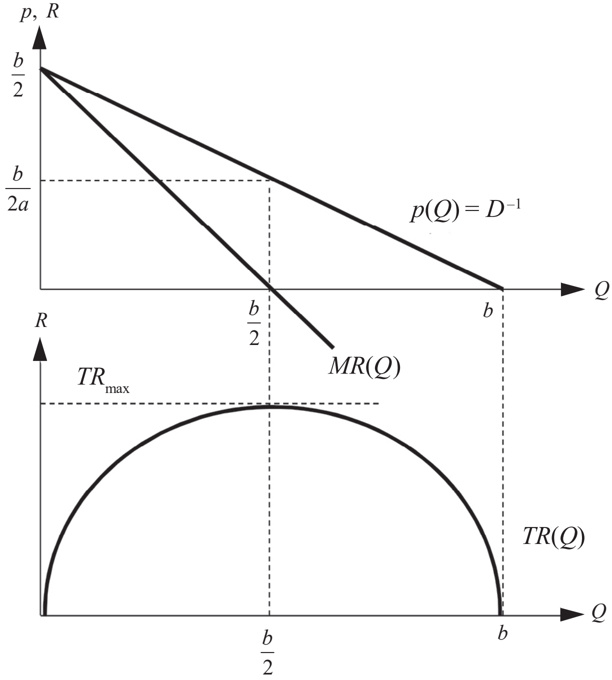

Рис. 2.4. Взаимосвязь динамики предельного, среднего и общего дохода неконкурентной фирмы с линейной функцией спроса

Типовые задания с решениями и ответами

Задание 2.1

Конкурентная фирма выпускает булочки с корицей. Предположим, на рынке сложилась цена 100 руб. за булочку. Выпишите функции общего, среднего и предельного дохода для данной фирмы.

Решение и ответ

Поскольку цена продукта, выпускаемого фирмой, – константа, равная 100 руб., функция общего дохода фирмы линейна и имеет вид $TR(Q) = 100Q$.

Средний доход фирмы не зависит от объема выпуска: $AR = p = 100$ руб.

Предельный доход фирмы также не зависит от объема выпуска и равен рыночной цене продукта: $MR = p = 100$ руб.

Ответ: $TR(Q) = 100Q$; $AR = p = 100$ руб.; $MR = p = 100$ руб.

Задание 2.2

Ежедневно мебельная фирма выпускает 100 стульев.

На начало месяца фирма не имела запасов готовой продукции на складе. В первый рабочий день марта при цене 2 500 руб. за стул фирма продала 80 стульев. На следующий день обнаружилось, что рыночная цена стула поднялась до 3 000 руб. К концу рабочего дня фирма распродала все выпущенные в этот день стулья и запас стульев на складе.

Какими в первый и второй рабочие дни марта будут общий доход фирмы, фактическая и максимально возможная выручка от реализации?

Решение и ответ

Обозначим ежедневный выпуск, в том числе и в рассматриваемые дни, как Q^t; рыночную цену, актуальную для соответствующего дня, – как p^t; общий доход в течение одного рабочего дня – как $TR^t(Q^t)$; фактическую выручку от реализации – как $\widetilde{TR}^t(\widetilde{Q}^t)$; максимально возможную выручку от реализации – как $\widetilde{TR}^t_{\max}(\widetilde{Q}^t_{\max})$.

Помним, что общий доход и выручка от реализации – не тождественные понятия. Кроме того, возможны и количественные различия, если объем выпуска и объем продаж не совпадают.

Величина общего дохода (TR) зависит от действующей на рынке цены (p^t) и объема выпуска текущего дня и определяется как $TR^t(Q^t) = p^t \cdot Q^t$.

Фактический размер выручки от реализации зависит от фактического объема продаж. Максимально возможная выручка от реализации определяется максимальным объемом продаж, который регулируется объемом выпуска и запасом готовой продукции на складе.

Выпуск в первый рабочий день марта – 100 единиц продукта, значит, общий доход составит $TR^1(Q^1) = p^1 \cdot Q^1 = 2\,500 \cdot 100 = 250\,000$ (руб.).

Максимально возможная выручка от реализации фирмы в первый день марта определяется исключительно объемом выпуска в этот день, поскольку запас готовой продукции на складе отсутствует.

Следовательно максимально возможная выручка составляет $\widetilde{TR}^1_{\max}(\widetilde{Q}^1_{\max}) = 250\ 000$ (руб.).

В первый рабочий день было продано 80 стульев. Следовательно фактическая выручка от реализации $\widetilde{TR}^1(\widetilde{Q}^1) = 2\,500 \cdot 80 = 200\,000$ (руб.).

Таким образом, соотношение искомых величин в первый рабочий день марта: $\widetilde{TR}^1_{\max}(\widetilde{Q}^1_{\max}) \geq TR^1(Q^1) > \widetilde{TR}^1(\widetilde{Q}^1)$.

Во второй рабочий день марта фирма имеет на складе 20 стульев; выпуск – 100 стульев. В соответствии с условиями задания максимально возможный объем продаж составит 120 стульев.

Величины максимально возможной и фактической выручки от реализации данной фирмы во второй рабочий день совпадают и составляют сумму, равную $\widetilde{TR}^2_{\max}(\widetilde{Q}^2_{\max}) = \widetilde{TR}^2(\widetilde{Q}^2) = 3\,000 \cdot (100+20) =$ $= 360\ 000$ (руб.).

Тогда во второй рабочий день марта соотношение искомых показателей таково: $\widetilde{TR}^2_{\max}(\widetilde{Q}^2_{\max}) = \widetilde{TR}^2(\widetilde{Q}^2) > TR^2(Q^2)$.

В рамках рассматриваемого задания показано, что соотношение общего дохода и выручки от реализации может быть разным.

Задание 2.3

Конкурентная фирма действует в условиях рынка, когда равновесие обеспечивается ценой в 50 денежных единиц. Как изменится динамика общего среднего и предельного дохода конкурентной фирмы, если изменение рыночной конъюнктуры обусловит:

(*а*) снижение цены выпускаемого фирмой продукта в 2 раза;

(*б*) увеличение цены на 25 %?

Решения и ответы

Исходное равновесие на рынке присутствия фирмы предопределяет вид функции общего дохода, а также динамику общего, среднего и предельного дохода фирмы. Вид начальной функции общего дохода: $TR(Q) = 50Q$. На графике это луч с наклоном α: $\text{tg}\,\alpha = 50$ (рис. 2.5).

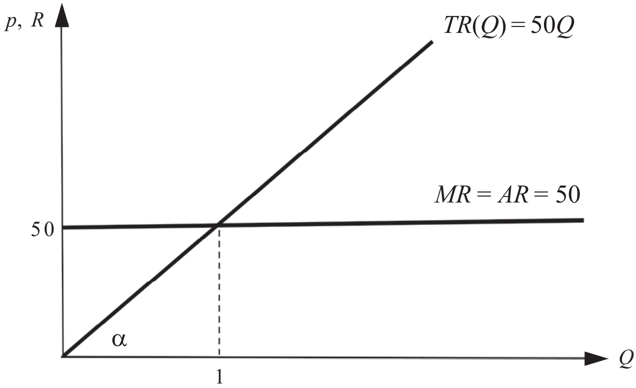

Рис. 2.5. Показатели дохода конкурентной фирмы при цене продукта 50 ден. ед.

(*а*) Снижение цены выпускаемого фирмой продукта в 2 раза означает, что линии среднего и предельного дохода сместятся параллельно вниз, а линия общего дохода станет более пологой; ее наклон – β: $\text{tg}\,\beta = 25$. Графическая иллюстрация последствий представлена на рис. 2.6.

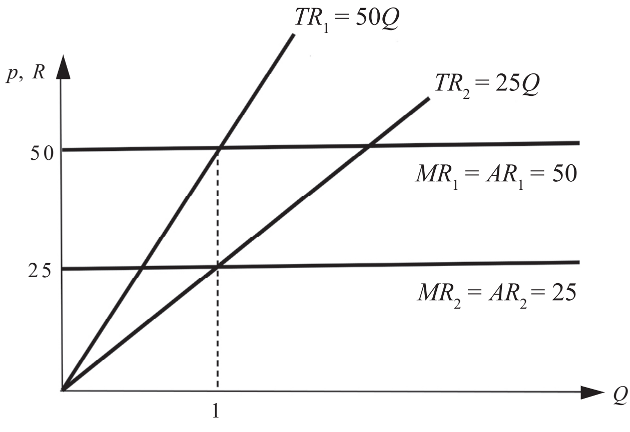

Рис. 2.6. Изменения в динамике общего, среднего и предельного дохода конкурентной фирмы, вызванные снижением рыночной цены

(*б*) Увеличение цены на 25 %, до уровня 62,5 руб., обусловит сдвиг линий среднего и предельного дохода параллельно вверх. Линия общего дохода станет более крутой; ее наклон – γ : tg γ = 62,5.

Графическая иллюстрация последствий представлена на рис. 2.7.

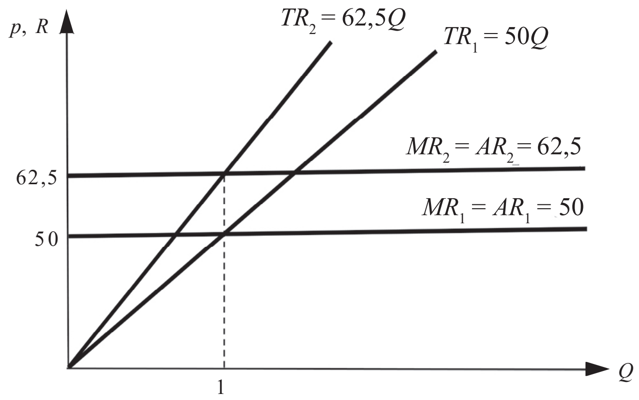

Рис. 2.7. Изменения в динамике общего, среднего и предельного дохода конкурентной фирмы, вызванные повышением рыночной цены

Задание 2.4

Предположим, фирма – *price-taker*. Спрос на ее продукцию зависит от цены следующим образом: $D = 600 - 5 \cdot p$. Найдите функциональные зависимости общего, среднего и предельного дохода от объема выпуска и отобразите вид функций на соответствующих графиках.

Решение и ответ

Прежде всего необходимо найти вид функции сбыта (функции цены спроса, или функции, обратной функции спроса). Одновременно эта функция покажет и зависимость среднего дохода от объема выпуска. Путем несложных вычислений получим:

$$p(Q) = AR(Q) = D^{-1}(p) = 120 - 0{,}2Q. \qquad (1)$$

Функция сбыта позволяет определить вид функции общего дохода:

$$TR(Q) = p(Q) \cdot Q = 120 \cdot Q - 0{,}2Q^2. \qquad (2)$$

Найдем вид функции предельного дохода:

$$MR(Q) = \frac{\partial TR(Q)}{\partial Q} = 120 - 0{,}4Q. \qquad (3)$$

Сопоставив функции цены спроса (среднего дохода) – (1) и предельного дохода – (3) для линейной функции спроса, несложно увидеть, что различие между этими функциями состоит в коэффициенте перед Q: в функции $MR(Q)$ этот коэффициент в 2 раза больше. Это означает, что предельный доход по мере увеличения объема снижается в 2 раза быстрее, чем цена (и средний доход). Динамика показателей дохода представлена на рис. 2.8.

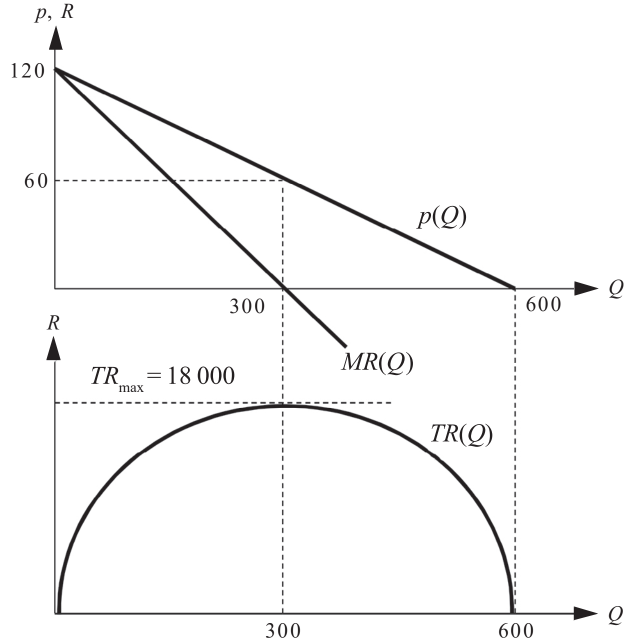

Рис. 2.8. Общий, средний и предельный доход фирмы, имеющей власть над ценой, на рынке с линейным спросом

Задание 2.5

Предположим, фирма – *price-maker*. Спрос на ее продукцию зависит от цены следующим образом: $D = \dfrac{500}{p}$. Найдите функциональные зависимости общего и среднего дохода от объема выпуска.

Решение и ответ

Прежде всего найдем функцию, обратную функции спроса. Это – функция цены спроса: $p(Q) = D(p)^{-1} = \dfrac{500}{Q}$.

Далее определим вид функции общего дохода:

$$TR(Q) = p(Q) \cdot Q = \frac{500}{Q} \cdot Q = 500.$$

Видим, что при имеющейся на рынке функциональной зависимости цены спроса от объема общий доход – константа.

Функция среднего дохода: $AR(Q) = \dfrac{TR}{Q} = \dfrac{500}{Q} = p(Q)$. Как и было показано в теоретической части данной главы, средний доход всегда функционально совпадает с ценой.

Задание 2.6

Предположим, фирма – *price-maker*. Спрос на ее продукцию зависит от цены следующим образом: $D = \dfrac{100}{p^2}$.

Найдите функциональные зависимости общего, среднего и предельного дохода от объема выпуска.

Решение и ответ

Прежде всего найдем функцию, обратную функции спроса. Это – функция цены спроса: $p(Q) = D(p)^{-1} = \dfrac{10}{Q^{0,5}}$. Поскольку спрос – нелинейная (степенная) функция цены, функция цены спроса также имеет нелинейный характер.

Далее определим вид функции общего дохода. Она нелинейна по объему:

$$TR(Q) = p(Q) \cdot Q = \frac{10}{Q^{0,5}} \cdot Q = 10 \cdot Q^{0,5}.$$

Функция среднего дохода: $AR(Q) = \frac{TR(Q)}{Q} = \frac{10 \cdot Q^{0,5}}{Q} = \frac{10}{Q^{0,5}} =$ $= p(Q)$. Полученный результат полностью согласуется с теоретическими выкладками: функция среднего дохода совпадает с функцией цены спроса.

Определим вид функции предельного дохода:

$$MR(Q) = \frac{\partial TR(Q)}{\partial Q} = \frac{\partial \left[\frac{10}{Q^{0,5}} \right]}{\partial Q} = \frac{5}{Q^{0,5}}.$$

Полученные для фирмы функции среднего и предельного дохода демонстрируют тот факт, что для любого объема выпуска величина предельного дохода в два раза меньше величины среднего дохода. Или, иначе, предельный доход по мере увеличения объема выпуска убывает быстрее, чем средний доход (и, соответственно, цена спроса).

Задание 2.7

Сохраним предположение, что фирма – *price-maker*. Функция ее предельного дохода имеет вид

$$MR(Q) = \begin{cases} 200 - 0,4Q, \text{ если } 0 < Q \le 500, \\ 120 - 0,08Q, \text{ если } 500 < Q < 3\,000. \end{cases}$$

Какие функциональные зависимости описывают динамику общего и среднего дохода данной фирмы? Какой вид имеет функция спроса на продукцию фирмы?

Решение и ответ

Для выполнения этого задания нам придется реализовать алгоритм, обратный тому, который использовался при выполнении предыдущих заданий: от функции предельного дохода перейдем к функции общего дохода и только затем определим вид функции среднего дохода, которая позволит – через обратную функцию – получить зависимость спроса от цены.

Функция общего дохода определяется так:

$$TR(Q) = \int_0^Q MR(Q)dQ = \begin{cases} 200Q - 0,2Q^2, \text{ если } 0 < Q \le 500, \\ 120Q - 0,04Q^2, \text{ если } 500 < Q < 3\,000. \end{cases}$$

Тогда функция среднего дохода (она же – функция цены спроса) имеет вид

$$AR(Q) = p(Q) = \begin{cases} 200 - 0,2Q, \text{ если } 0 < Q \le 500, \\ 120 - 0,04Q, \text{ если } 500 < Q < 3\,000. \end{cases}$$

Теперь получим функцию спроса на продукцию фирмы:

$$D(p) = \begin{cases} 1\,000 - 5p, \text{ если } 100 \le p < 200, \\ 3\,000 - 25p, \text{ если } 0 < p < 100. \end{cases}$$

Найденные функциональные зависимости можно отобразить графически.

Динамика цены спроса, среднего дохода и предельного дохода для данной фирмы представлены на рис. 2.9.

Следует обратить внимание на график функции предельного дохода. У него имеется разрыв при объеме выпуска, составляющем 500 единиц продукта. Точка с координатами (500; 60) выколота. Данное обстоятельство объясняется тем, что на объем 500 единиц продукта спрос предъявляется одной из групп покупателей, зависимость спроса от цены которых такова: $D(p) = 1\,000 - 5p$. Вторая группа подключается при цене ниже 100 денежных единиц. Ею спрос предъявляется на единицы, превышающие отметку 500.

При необходимости можно также построить график функции $TR(Q)$, который будет отражать кусочно-непрерывный характер

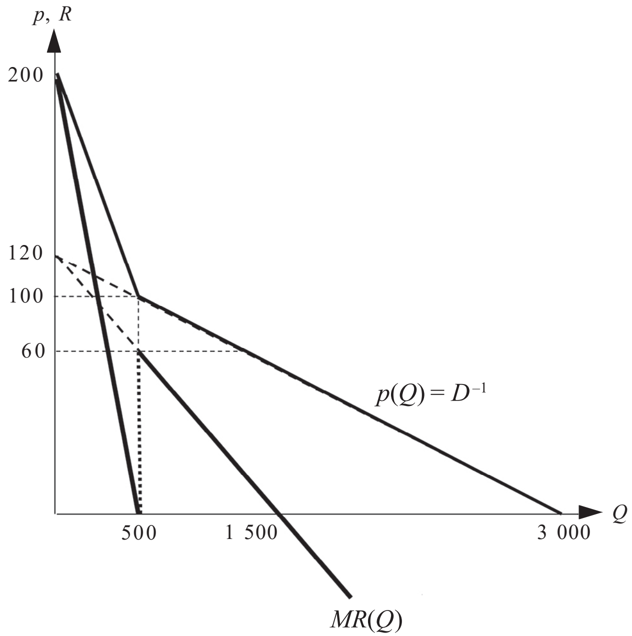

Рис. 2.9. Средний и предельный доход фирмы
с кусочно-непрерывной функцией спроса

функции спроса на продукцию фирмы. Излом графика функции общего дохода наблюдается при объеме 500 единиц продукта. Следовательно можно обнаружить локальный максимум при объеме сбыта 500 единиц продукта. В этом случае продукт реализуется только одной группе покупателей – той, которая имеет более высокую резервную цену. Величина общего дохода составит: $TR(500) = p(500) \cdot 500 = 100 \cdot 500 = 5 \cdot 10^4$ (ден. ед.).

Максимума величина общего дохода достигает при объеме сбыта 1 500 единиц продукта. При этом величина общего дохода составляет сумму, равную $TR(1\,500) = p(1\,500) \cdot 1\,500 = 60 \cdot 1\,500 = 9 \cdot 10^4$ (ден. ед.). Устанавливаемая цена предопределяет возможность приобретения продукта обеими группами покупателей.

3. ИЗДЕРЖКИ ФИРМЫ: СУЩНОСТЬ, ВИДЫ И ДИНАМИКА

Процессу извлечения прибыли предшествует производственный процесс, который был подробно рассмотрен в главе 1. В преамбуле к главе 2 представлена денежная характеристика результатов и затрат фирмы (см. рис. 2.1). Производство предполагает использование ресурсов, которые привлекаются преимущественно через рынки. Фирма также может использовать находящиеся в ее собственности факторы производства. В данной главе будет дана денежная характеристика затрат, связанных с производственной деятельностью фирмы.

3.1. Денежная характеристика производственных затрат. Типология издержек

Затраты ресурсов на осуществление производства в денежном выражении принято назвать и з д е р ж к а м и[13]. При этом денежной оценке подлежат все факторы, участвующие в создании продукта в определенном объеме, независимо от того, привлекаются ли они через рынки или находятся в собственности самой фирмы.

Денежная оценка затрат на осуществление производства может быть дана в рамках двух подходов: экономического и бухгалтерского.

Бухгалтерский подход к определению величины издержек предполагает учет только явных затрат, т. е. понесенных в прямой денежной форме и подтвержденных соответствующими документами финансовой отчетности.

---

[13] Поскольку «издержки» – категория денежная, тождественная понятию «денежные затраты», недопустимо использование словосочетания «денежные издержки». Нередко встречающееся понятие «моральные издержки» следует понимать как денежную оценку морального, репутационного и прочего ущерба.

В микроэкономической теории используется *экономический подход* к определению величины издержек (к денежной оценке затрат на осуществление производственной деятельности). Он состоит в том, что оцениваются затраты всех ресурсов, как привлеченных через рынок (явные затраты), так и принадлежащих фирме (неявные затраты). Величина неявных затрат (вмененных издержек) определяется как альтернативная стоимость ресурсов, принадлежащих фирме и использованных ею в производственном процессе.

Альтернативная стоимость фактора производства определяется как максимальная упущенная выгода при «инсайдерском» (внутрифирменном) его использовании. Кроме того, производственный процесс не может быть осуществлен без участия такого фактора производства, как предпринимательская способность. Рынка этого фактора производства не существует, следовательно учесть напрямую его затраты не представляется возможным. Единственный способ учета вклада этого фактора – включение в издержки величины предпринимательского дохода как вознаграждения за предпринимательскую способность.

Виды издержек многообразны. Их можно классифицировать по взаимосвязи с уровнями выпуска; по видам применяемых факторов производства; по временно́му интервалу (табл. 3.1).

Таблица 3.1

Классификация видов издержек

Принцип классификации/признак	Вид издержек
Тип взаимосвязи с уровнями выпуска	Общие
	Средние
	Предельные
Вид применяемого фактора производства	Постоянные
	Переменные
	Квазипостоянные
Продолжительность временно́го интервала	Краткосрочные
	Долгосрочные

Основными категориями, характеризующими затратную сторону деятельности фирмы, являются общие издержки (*total cost(s)* – *TC*), средние издержки (*average cost(s)* – *AC*) и предельные издержки (*marginal cost(s)* – *MC*).

Общие издержки определяются как суммарная оценка затрат на обеспечение выпуска Q:

$$TC(Q) = \overline{W} \cdot \overline{R}(Q) = \sum_{j=1}^{m} w_j \cdot R_j(Q), \tag{3.1}$$

где w_j – цена j-го фактора; R_j – объем использования j-го фактора.

При определении величины любого вида издержек будем исходить из того, что фирма является ценополучателем на рынках всех факторов производства (т. е. не имеет контроля над ценой или монопсонической власти), а цены всех факторов производства – экзогенные параметры принятия решений.

Средние издержки показывают величину денежных затрат на каждую произведенную единицу продукта:

$$AC(Q) = \frac{TC(Q)}{Q} = \frac{\sum_{j=1}^{m} w_j \cdot R_j(Q)}{Q}. \tag{3.2}$$

Предельные издержки показывают величину денежных затрат на обеспечение выпуска последней произведенной единицы или изменение общих издержек при изменении объема выпуска на единицу. Для дискретной производственной функции величина предельных издержек определяется по формуле

$$MC(Q) = TC(Q) - TC(Q - 1), \tag{3.3}$$

для непрерывной производственной функции – по формуле

$$MC(Q) = \frac{\partial TC(Q)}{\partial Q}. \tag{3.4}$$

Рассмотренные выше основные виды издержек выделены по принципу «взаимосвязь с уровнями выпуска – в целом, в среднем, в пределе». Это – не единственная важная классификация.

Для целей последующего анализа решений, принимаемых фирмой, необходима классификация издержек по принципам «вид применяемого фактора производства» и «продолжительность временно́го интервала».

В производстве участвуют факторы, объем использования которых непосредственно связан с объемом выпуска (переменные факторы); факторы, затраты на содержание которых фирма несет независимо от выпуска (постоянные факторы). Кроме того, фирма – при ненулевом выпуске – может использовать некоторые факторы в объеме, не зависящем от выпуска. При нулевом выпуске затраты таких факторов не осуществляются. В соответствии с данной классификацией факторов производства выделяются следующие виды издержек: постоянные (*fixed costs – FC*); переменные (*variable costs – VC*); квазипостоянные (*quasi-fixed costs – QFC*). Зависимости видов издержек от объема выпуска выглядят следующим образом:

$$FC = \text{const}, \ \forall\, Q \geq 0; \tag{3.5}$$

$$VC = f(Q), \ \forall\, Q > 0; \tag{3.6}$$

$$QFC = \begin{cases} 0, \text{ если } Q = 0, \\ \text{const, если } Q > 0. \end{cases} \tag{3.7}$$

Учитывая типы зависимости видов издержек от объема выпуска, можно охарактеризовать структуру издержек. Общие издержки включают все перечисленные выше издержки, и функция будет иметь вид

$$TC(Q) = FC + VC(Q) + QFC = FC + OC(Q), \tag{3.8}$$

где $OC(Q)$ – операционные издержки, затраты в денежной форме, появляющиеся только при положительном выпуске.

Далее уточним вид функций средних и предельных издержек.

Функция средних издержек имеет следующий вид:

$$AC(Q) = \frac{TC(Q)}{Q} = \frac{FC(Q)}{Q} + \frac{VC(Q)}{Q} + \frac{QFC}{Q}. \tag{3.9}$$

То есть средние издержки включают три структурных элемента (средние постоянные, средние переменные, средние квазипостоянные издержки), которые могут быть представлены как совокупность средних постоянных и средних операционных издержек:

$$AC(Q) = AFC(Q) + AVC(Q) + AQFC(Q) = \\ = AFC(Q) + AOC(Q). \quad (3.10)$$

Функция предельных издержек с учетом внутренней структуры общих издержек имеет следующий вид:

$$MC(Q) = \frac{\partial TC(Q)}{\partial Q} = \frac{\partial [FC + VC(Q) + QFC]}{\partial Q} = \frac{\partial VC(Q)}{\partial Q}. \quad (3.11)$$

Предельные издержки, следовательно, определяются изменением такого структурного элемента общих издержек, как переменные.

По продолжительности временно́го интервала, в рамках которого фирма принимает решения, издержки подразделяются на краткосрочные, издержки короткого периода (*short run costs*) и издержки долгосрочные, издержки длительного периода (*long run costs*).

Далее обратимся к анализу динамики всех видов издержек в коротком, а затем – в длительном периоде.

3.2. Динамика издержек производства в коротком периоде

Для понимания динамики всех видов издержек (их зависимости от объема выпуска) необходимо рассмотреть алгоритм построения функций издержек.

Величина издержек непосредственным образом связана с применяемой технологией и типом производственной функции. Поскольку издержки – денежная оценка производственных затрат, необходимо установление функциональной зависимости затрат ресурсов от объема выпуска, т. е. функции производственных затрат. Функция производственных затрат является обратной к производственной функции. Функция издержек строится на основе функции производственных затрат, представляя собой денежную оценку производственных затрат – затрат ресурсов в натуральном выражении. Таким образом, алгоритм построения функции издержек включает три последовательно реализуемых этапа (рис. 3.1).

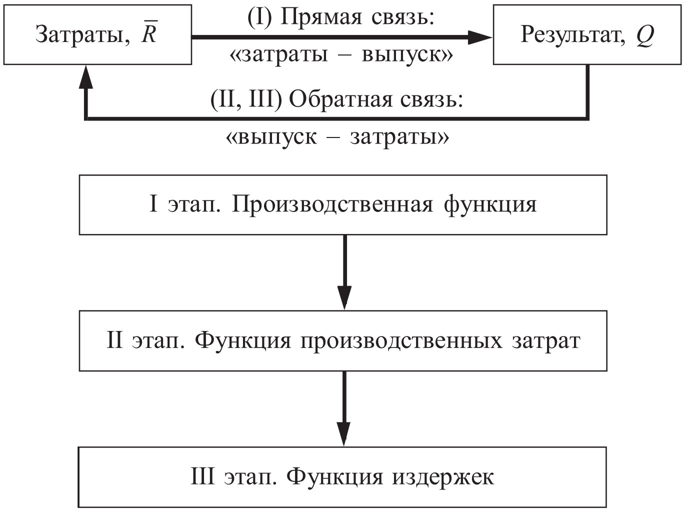

Рис. 3.1. Функциональные взаимосвязи результата и затрат в деятельности фирмы и алгоритм построения функции издержек

На основе представленного алгоритма получим функции всех видов издержек, что позволит осуществить анализ динамики затратных характеристик деятельности фирмы с помощью соответствующих графиков.

Постоянные и квазипостоянные издержки в полном объеме – горизонтальные прямые, отстоящие от начала координат на величину FC и QFC соответственно. Функции средних постоянных издержек и средних квазипостоянных издержек (если таковые имеются) графически представляют собой равносторонние гиперболы, расположенные в первом квадранте: их значения убывают по мере увеличения объема выпуска.

Для построения графиков функций переменных издержек будем исходить из предположения, что фирма применяет k видов постоянных факторов (объем использования которых в рамках короткого периода фирма изменить не может) и один переменный фактор – фактор «труд».

То есть $R_j = \text{const}, \forall\ j = \overline{1, k}; L = \varphi(Q)$. Производственная функция в этом случае имеет вид

$$Q(\overline{R}) = F(R_1^{\#}, R_2^{\#},\ \ldots, R_k^{\#}, L) = \widetilde{F}(L), \tag{3.12}$$

где затраты постоянных факторов – $R_j^{\#} = \text{const}, \forall\ j = \overline{1, k}$; $\widetilde{F}$ – модифицированный вид производственной функции, показывающей зависимость выпуска от затрат труда при имеющемся запасе постоянных факторов производства.

Тогда функция общих издержек будет иметь вид

$$TC(Q) = \sum_{j=1}^{k} w_j R_j + wL(Q) = FC + wL(Q), \tag{3.13}$$

где w – ставка заработной платы (*wage*), или цена единицы труда; L – затраты труда, измеряемые в человеко-часах.

Также будем полагать, что отдача от фактора «труд» (предельный и средний продукт труда) вначале растет, а достигнув максимума, убывает (рис. 3.2). Объемы использования труда в интервале $L > L^{**}$ не рассматриваются, поскольку функция предельного продукта труда принимает отрицательные значения.

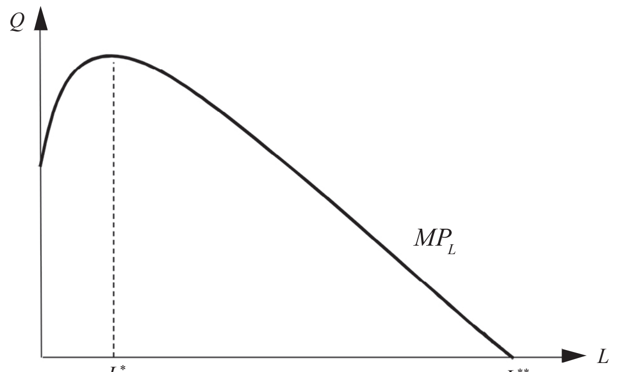

Рис. 3.2. Динамика предельного продукта труда

Определим далее вид функции, обратной функции предельного продукта труда, на основе производственной функции, описанной в (3.12). Речь идет о функции предельных трудозатрат (предельных затрат труда) – $ML(Q)$. Функция предельного продукта труда имеет следующий вид:

$$MP_L(L) = \frac{\partial Q(\overline{R})}{\partial L} = \frac{\partial \widetilde{F}(L)}{\partial L}. \tag{3.14}$$

Тогда функция предельных трудозатрат такова:

$$ML(Q) = MP_L^{-1}. \tag{3.15}$$

График функции предельных трудозатрат представлен на рис. 3.3. При объеме использования труда L^* значение функции MP_L достигает максимума. Выпуск, обеспечиваемый фирмой в этом случае, – Q^* $(Q^* = \widetilde{F}(L^*))$. Соответственно предельные трудозатраты снижаются, пока предельный продукт труда растет, и увеличиваются при снижении предельного продукта труда. Иначе, при объеме выпуска Q^* функция предельных трудозатрат достигает минимума.

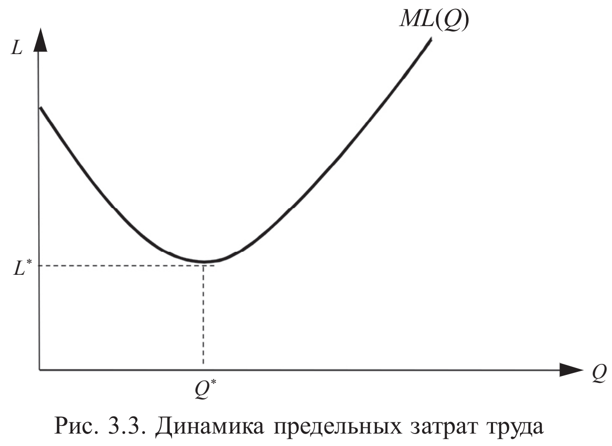

Рис. 3.3. Динамика предельных затрат труда

Получив функцию предельных трудозатрат, можем далее определить вид функции предельных издержек:

$$MC(Q) = w \cdot ML(Q). \tag{3.16}$$

Конфигурация кривой предельных издержек представлена на рис. 3.4. Такие кривые принято называть *U*-образными кривыми издержек. Функции предельных издержек повторяют конфигурацию функции предельных трудозатрат; отличие – в единицах измерения. Предельные издержки снижаются, пока предельный продукт труда растет, достигают минимума при объеме выпуска Q^*, а затем начинают расти, что соответствует зоне снижения предельного продукта переменного фактора.

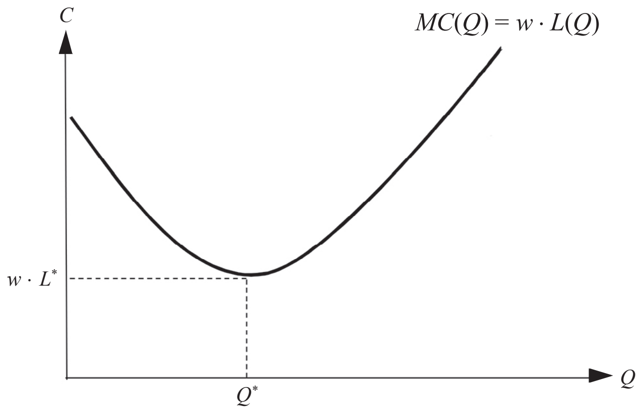

Рис. 3.4. Динамика предельных издержек

По отношению к другим видам издержек (средним переменным и общим переменным), связанным с переменным фактором производства, применим тот же алгоритм, который был использован для получения функции предельных издержек.

Функция средних переменных издержек, соответствующая рассматриваемой производственной функции с одним переменным фактором, имеет вид

$$AVC(Q) = w \cdot AL(Q) = w \cdot [AP_L]^{-1}, \qquad (3.17)$$

где $AL(Q)$ – средние трудозатраты, определяемые как функция, обратная функции среднего продукта труда AP_L.

Средние переменные издержки – убывающая функция объема выпуска до тех пор, пока средний продукт труда растет. Минимума средние переменные издержки достигают при объеме Q^0, обеспечиваемом затратами труда на уровне L^0, когда средний продукт труда максимален и равен предельному продукту труда (см. рис. 1.3). Кривая средних переменных издержек, так же, как и кривая предельных издержек, имеет U-образную форму. Ее конфигурация представлена на рис. 3.5, где также отображена динамика предельных издержек. Следует обратить внимание на то, что минимума средние переменные издержки достигают при равенстве предельным издержкам.

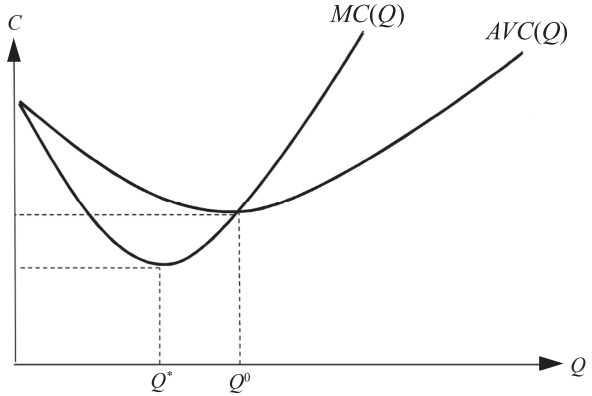

Рис. 3.5. Динамика средних переменных издержек

Функция (общих) переменных издержек, соответствующая рассматриваемой производственной функции с одним переменным фактором, имеет вид

$$VC(Q) = w \cdot L(Q) = w \cdot [TP_L]^{-1}, \qquad (3.18)$$

где $L(Q)$ – общие трудозатраты, определяемые как функция, обратная функции общего продукта труда TP_L (см. рис. 1.3).

Переменные издержки – возрастающая функция объема выпуска. При этом пока предельный продукт труда увеличивается, общий продукт труда растет быстрее, чем затраты труда. Как следствие, переменные издержки растут медленнее, чем растет выпуск. Когда предельный продукт труда начинает убывать, общий продукт труда растет медленнее, чем затраты труда. Это обусловливает рост переменных издержек более быстрым темпом, нежели рост объема выпуска. При достижении трудом объема L^{**} предельный продукт труда становится равен нулю и далее принимает отрицательные значения. Общий продукт труда положителен, но уменьшается при дальнейшем увеличении количества труда. Это обстоятельство обусловливает наличие у кривой переменных издержек изгибающегося назад участка: издержки растут, выпуск при этом уменьшается, что означает технологическую неэффективность применяемых комбинаций факторов производства. Рациональный агент не допустит подобной ситуации.

Из сказанного можно заключить, что при наличии неизменного запаса некоторых факторов производства существует предел производственных возможностей фирмы, характерный для короткого периода. Максимально достижимый в этих условиях выпуск – $Q^{**} = F(R_1^{\#}, R_2^{\#}, ..., R_k^{\#}, L^{**})$. График функции переменных издержек представлен на рис. 3.6.

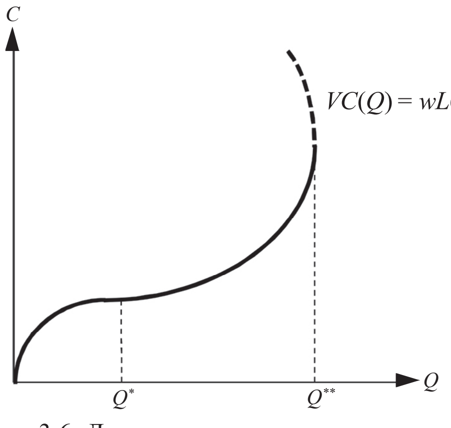

Рис. 3.6. Динамика переменных издержек

Чтобы получить представление о динамике общих издержек, необходимо вспомнить о наличии наряду с переменными издержками издержек постоянных (и, возможно, квазипостоянных издержек). Конфигурация кривой $TC(Q)$ в точности повторяет конфигурацию кривой переменных издержек, но каждая ее точка смещена вверх на расстояние, равное сумме *FC* и *QFC*. График функции общих издержек представлен на рис. 3.7.

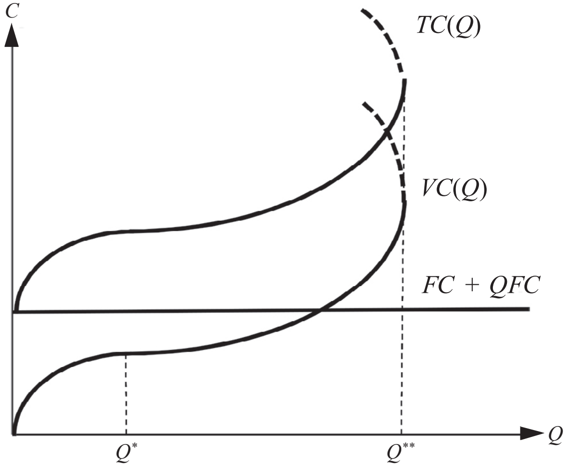

Рис. 3.7. Динамика общих издержек

В заключение представим совокупную картину динамики краткосрочных издержек, понимание которой необходимо для целей последующего анализа. Речь идет о предельных, средних переменных, средних постоянных и средних издержках. Все эти кривые представлены на рис. 3.8.

Кривая средних издержек (для рассматриваемой производственной функции и изменяющейся предельной производительности переменного фактора) имеет *U*-образную форму. Средние издержки убывают вплоть до объема выпуска $Q^{\#}$, при котором они равны предельным издержкам. Дальнейшее увеличение объема выпуска приводит к росту средних издержек. Дистанция между кривыми средних издержек и средних переменных издержек определяется величиной средних постоянных издержек (плюс величина средних квазипостоянных издержек, если они имеют место). С ростом объема выпуска указанная дистанция сокращается. Можно говорить о двух асимптотах кривой $AC(Q)$: левая асимптота – кривая

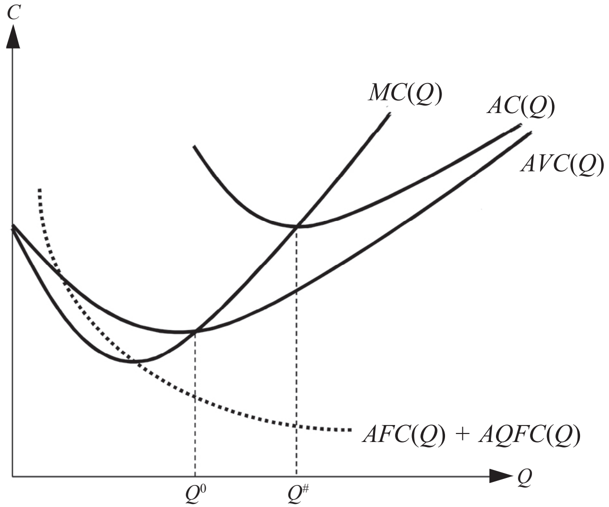

Рис. 3.8. Динамика краткосрочных издержек фирмы

AFC(*Q*) + *AQFC*(*Q*); правая асимптота – кривая *AVC*(*Q*). Кривая средних издержек лежит выше всех кривых издержек, отражающих динамику ее структурных элементов.

3.3. Динамика долгосрочных издержек фирмы

В данном подразделе речь пойдет о зависимостях издержек от объема выпуска в условиях длительного периода, т. е. о долгосрочных издержках.

Необходимо отметить, что длительный период можно рассматривать как совокупность коротких периодов. Значит, имеет место взаимосвязь долгосрочных и краткосрочных издержек. В анализе акцент сделан на динамике средних и предельных издержек.

В рамках длительного периода фирма не связана ограничениями по применению какого-либо фактора производства, она может увеличить/уменьшить объем использования любого ресурса включая производственные мощности.

Следовательно все издержки в длительном периоде (*долгосрочные издержки*) по определению зависят от объема выпуска, варьируются, а значит, являются переменными. Иначе, в длительном периоде отсутствуют постоянные издержки. Однако в некоторых случаях фирма может столкнуться с квазипостоянными издержками.

Ранее отмечалось, что в длительном периоде появляется такой фактор производства, как масштаб производства (ω), что обусловлено возможностью изменения в том числе и запаса производственных мощностей. В свою очередь, данное обстоятельство предопределяет зависимость динамики долгосрочных средних издержек (*ACL*) от типа отдачи от масштаба (Ω). Если для отрасли присутствия фирмы характерна возрастающая отдача от масштаба (*IRS*), долгосрочные средние издержки убывают по мере увеличения объема выпуска: $\frac{\partial ACL(Q)}{\partial Q} < 0.$ При постоянной отдаче от масштаба (*CRS*) долгосрочные средние издержки не зависят от объема выпуска, т. е. $\frac{\partial ACL(Q)}{\partial Q} = 0.$ Убывающая отдача от масштаба (*DRS*) предопределяет рост долгосрочных средних издержек по мере увеличения объема выпуска: $\frac{\partial ACL(Q)}{\partial Q} > 0.$

Анализ динамики долгосрочных средних издержек позволяет установить оптимальный для отрасли размер предприятия (фирмы). Признаком оптимального размера является достижение долгосрочными средними издержками минимального значения. То есть оптимальный размер (масштаб производства) – Q^* таков, что фирма имеет запас производственных мощностей, полное использование которого обеспечивает выпуск продукта на уровне Q^* при минимальных средних издержках длительного периода.

Единственным образом оптимальный размер устанавливается в случае, когда возрастающая отдача от масштаба сменяется убывающей (рис. 3.9).

В случае достижения долгосрочными средними издержками минимума и последующей их неизменности используют понятие «минимально эффективный размер (масштаб) предприятия»

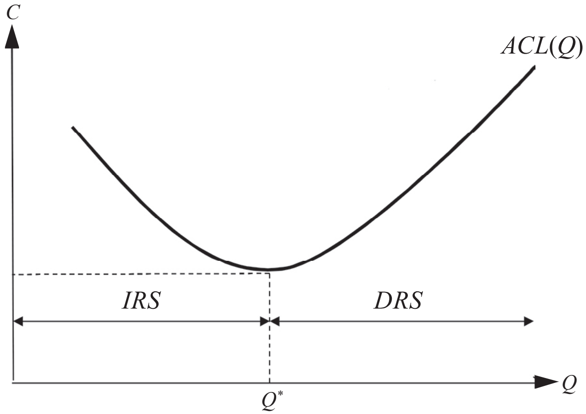

Рис. 3.9. Тип отдачи от масштаба и оптимальный размер предприятия в отрасли

[*minimum efficient size* (*scale*) – *MES*]. Возможны два сценария развития событий: (а) для отрасли характерны все три типа отдачи от масштаба, последовательно сменяющие друг друга (рис. 3.10); (б) отдача от масштаба растет, достигает максимума, а затем наблюдается только постоянная отдача от масштаба (рис. 3.11). Следует обратить внимание на то, что величина долгосрочных средних издержек постоянна в интервале выпуска от $\widehat{Q}$ до $\breve{Q}$. Данное обстоятельство свидетельствует о том, что в отрасли имеет место постоянная отдача от масштаба.

И на рис. 3.10, и на рис. 3.11 минимально эффективный размер (*MES*) достигается при объеме выпуска $\widehat{Q}$.

В начале данного подраздела говорилось о наличии взаимосвязи между издержками длительного периода и краткосрочными издержками. Разъясним эту взаимосвязь более подробно с целью анализа алгоритма построения кривой долгосрочных средних издержек.

Рассмотрим алгоритм для случая дискретного изменения масштаба производства. Предположим, в отрасли возможно функционирование предприятий трех типоразмеров – малого (*small* – *S*), среднего (*medium* – *M*) и крупного (*large* – *L*). Отдача от масштаба возрастает при изменении размера предприятия с малого до сред-

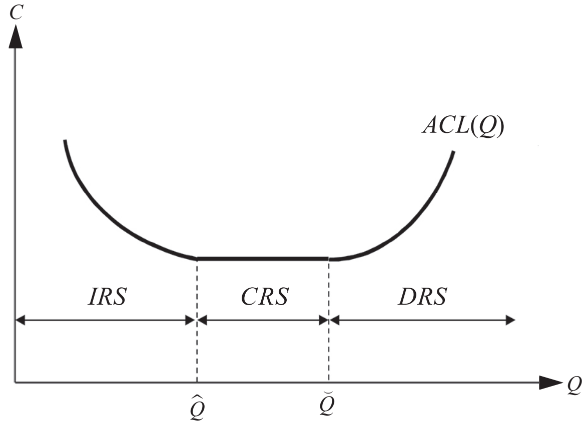

Рис. 3.10. Три типа отдачи от масштаба
и минимально эффективный размер предприятия в отрасли

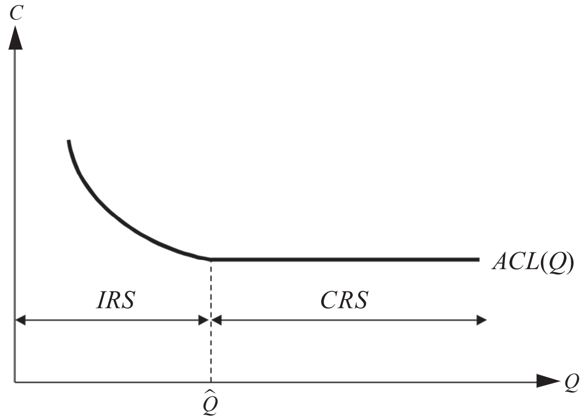

Рис. 3.11. Два типа отдачи от масштаба
и минимально эффективный размер предприятия в отрасли

него и убывает при увеличении размера предприятия до крупного. В случае, когда производственные мощности предприятия любого размера загружены полностью, краткосрочные средние издержки минимальны, что соответствует объемам выпуска Q_S^*, Q_M^* и Q_L^*. Как фирма будет принимать решения об изменении размера предприятия? Критерием для выбора размера предприятия является наименьшая величина краткосрочных средних издержек. Если на предприятии большего размера средние издержки ниже, фирма принимает решение об укрупнении. На рис. 3.12 представлены соответствующие кривые краткосрочных и долгосрочных средних издержек. Кривая *ACL обволакивает* кривые краткосрочных средних издержек. Минимума долгосрочные средние издержки достигают на предприятии среднего размера, когда меняется тип отдачи от масштаба.

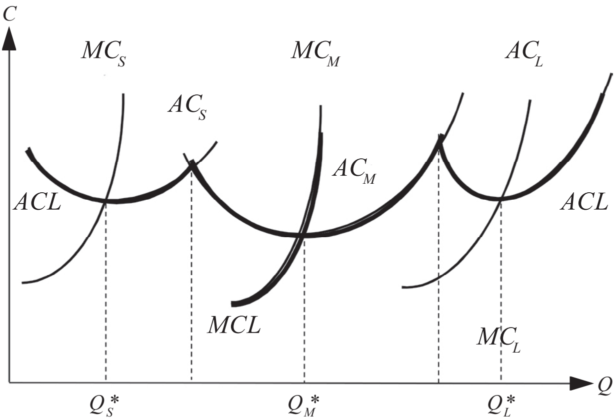

Рис. 3.12. Долгосрочные средние издержки фирмы (три возможных типоразмера предприятия)

В случае непрерывного изменения масштаба производства в отрасли существует бесконечное количество типоразмеров предприятия. На любом из предприятий краткосрочные средние издержки достигают минимума при полном использовании имеющихся производственных мощностей.

Динамика долгосрочных средних издержек такого типа представлена на рис. 3.13.

Кривая долгосрочных средних издержек будет иметь *U*-образную форму, опоясывая кривые краткосрочных средних издержек: по нисходящим ветвям (при возрастающей отдаче от масштаба); по восходящим ветвям (при убывающей отдаче от масштаба);

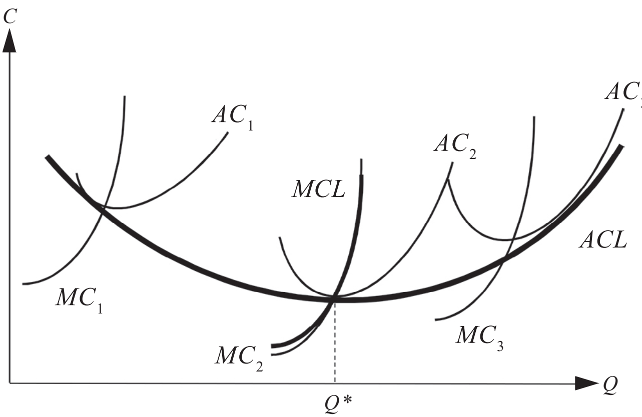

Рис. 3.13. Непрерывное изменение масштаба производства и долгосрочные средние издержки фирмы

при объеме выпуска Q^* долгосрочные средние издержки минимальны, следовательно Q^* – оптимальный размер предприятия в данной отрасли.

Типовые задания с решениями и ответами

Задание 3.1

Рассмотрите структуру общих издержек фирмы и определите вид функций переменных, операционных, предельных, средних переменных, средних операционных и средних издержек.

Функция общих издержек фирмы имеет вид:

$$TC(Q) = \begin{cases} 150, \; Q = 0, \\ 175 + 10Q + 0{,}25Q^2, \; Q > 0. \end{cases}$$

Решение и ответ

Анализ функции $TC(Q)$ фирмы позволяет вычленить следующие структурные элементы: FC, QFC и $VC(Q)$. Следовательно можно также вычленить элемент $OC(Q)$, не совпадающий с $VC(Q)$.

Вид функции переменных издержек: $VC(Q) = 10Q + 0{,}25Q^2$.

Операционные издержки фирмы больше переменных на величину квазипостоянных издержек, составляющих 175 – 150 = 25 (ден. ед.). Тогда функция операционных издержек: $OC(Q) = 25 + 10Q + 0{,}25Q^2$.

Функцию предельных издержек получим посредством дифференцирования функции $TC(Q)$ по Q: $MC(Q) = 10 + 0{,}5Q$.

Средние переменные издержки фирмы: $AVC(Q) = \frac{VC(Q)}{Q} =$ $= 10 + 0{,}25Q$.

Средние операционные издержки отличаются от средних переменных издержек на величину средних квазипостоянных издержек ($AQFC$) и представимы функцией вида $AOC(Q) = \frac{OC(Q)}{Q} =$ $= \frac{25}{Q} + 10 + 0{,}25Q.$

Средние издержки фирмы включают наряду со средними операционными еще и средние постоянные. Тогда функция средних издержек фирмы имеет вид

$$AC(Q) = \frac{TC(Q)}{Q} = \frac{FC + QFC + VC(Q)}{Q} = \frac{FC + OC(Q)}{Q} =$$

$$= \frac{150}{Q} + \left[\frac{25}{Q} + 10 + 0{,}25Q\right].$$

Таким образом, функциональные зависимости всех видов издержек фирмы от ее объема выпуска определены.

Задание 3.2

Известно, что средние издержки фирмы зависят от объема выпуска следующим образом: $AC(Q) = 100 + 5Q + 0{,}25Q^2$.

(*а*) Определите период, в котором фирма принимает решения (короткий или длительный).

(*б*) Найдите функциональную зависимость предельных издержек от объема выпуска.

Решения и ответы

Прежде всего найдем функцию общих издержек фирмы. Ее вид:

$$TC(Q) = Q \cdot AC(Q) = 100Q + 5Q^2 + 0{,}25Q^3.$$

(*а*) Вид функции $TC(Q)$ позволяет определить структуру издержек и продолжительность временнóго интервала, в рамках которого фирма принимает решения. Анализ функции $TC(Q)$ показывает, что все элементы издержек зависят от объема выпуска. Следовательно период – длительный.

(*б*) Продифференцировав функцию $TC(Q)$, получим функцию предельных издержек фирмы:

$$MC(Q) = 100 + 10Q + 0{,}75Q^2.$$

Задание 3.3

Известно, что функция предельных издержек фирмы имеет U-образную форму.

1. Докажите, что в точке своего минимума:

(*а*) средние переменные издержки равны предельным издержкам;

(*б*) средние операционные издержки равны предельным издержкам;

(*в*) средние издержки равны предельным издержкам.

2. Покажите на графике кривые всех видов издержек и точки их минимумов.

3. Выпишите соотношение объемов, обеспечивающих достижение минимумов указанных функций, и соотношение значений функций для найденных объемов.

Решения и ответы

1. Рассмотрим издержки в точках их минимума.

(*а*) Выпишем функцию средних переменных издержек и найдем ее минимум в соответствии с *FOC*.

$$AVC(Q) = \frac{VC(Q)}{Q};\ FOC\ s.t.\frac{\partial AVC(\widetilde{Q})}{\partial Q} = 0.$$

Найдем объем, при котором средние переменные издержки минимальны, или объем выпуска – $\widetilde{Q}$:

$$\frac{\partial AVC(\widetilde{Q})}{\partial Q}=\frac{\partial VC(\widetilde{Q})}{\partial Q}\cdot\frac{1}{\widetilde{Q}}+VC(\widetilde{Q})\cdot(-1)\cdot\frac{1}{\widetilde{Q}^2}=$$

$$=\frac{1}{\widetilde{Q}}\cdot\left[\frac{\partial VC(\widetilde{Q})}{\partial Q}-\frac{VC(\widetilde{Q})}{\widetilde{Q}}\right]=0.$$

Поскольку, по определению, $MC(Q)=\dfrac{\partial VC(Q)}{\partial Q}$ и $AVC(Q)=\dfrac{VC(Q)}{Q}$, а $\dfrac{1}{\widetilde{Q}}\neq 0$, то из условия первого порядка получим: $AVC(\widetilde{Q})=MC(\widetilde{Q})$.

Таким образом, экстремума функция $AVC(Q)$ достигает при объеме выпуска $\widetilde{Q}$.

Тот факт, что экстремум является минимумом, а не максимумом функции $AVC(Q)$, объясняется U-образной формой кривой $MC(Q)$ и, следовательно, аналогичной формой кривой $AVC(Q)$.

(*б*) Выпишем функцию средних операционных издержек и найдем ее минимум в соответствии с FOC.

$$AOC(Q)=\frac{QFC+VC(Q)}{Q};\;\; FOC\; s.t.\frac{\partial AOC(\overline{\overline{Q}})}{\partial Q}=0.$$

Найдем объем, при котором средние операционные издержки минимальны. Это объем $\overline{\overline{Q}}$:

$$\frac{\partial AOC(\overline{\overline{Q}})}{\partial Q}=\frac{\partial OC(\overline{\overline{Q}})}{\partial Q}\cdot\frac{1}{\overline{\overline{Q}}}+OC(\overline{\overline{Q}})\cdot(-1)\cdot\frac{1}{\overline{\overline{Q}}^2}=$$

$$=\frac{1}{\overline{\overline{Q}}}\cdot\left[\frac{\partial OC(\overline{\overline{Q}})}{\partial Q}-\frac{OC(\overline{\overline{Q}})}{\overline{\overline{Q}}}\right]=0.$$

Операционные издержки включают в себя дополнительный элемент – квазипостоянные издержки, не зависящие от объема выпуска. Тогда получим: $MC(Q) = \dfrac{\partial OC(Q)}{\partial Q}$. По определению, $AOC(Q) = \dfrac{OC(Q)}{Q}$. При этом должно соблюдаться требование: $\dfrac{1}{\overline{\overline{Q}}} \neq 0$. Далее из условия первого порядка получим: $AOC(\overline{\overline{Q}}) =$ $= MC(\overline{\overline{Q}})$. Таким образом, экстремума функция $AOC(Q)$ достигает при объеме выпуска $\overline{\overline{Q}}$.

Тот факт, что экстремум является минимумом, а не максимумом функции $AOC(Q)$, объясняется U-образной формой кривой $MC(Q)$, а также наличием квазипостоянных издержек. То есть кривая $AOC(Q)$ имеет U-образную конфигурацию.

(*в*) Выпишем функцию средних издержек и найдем ее минимум.

$$AC(Q) = \frac{TC(Q)}{Q} = \frac{FC + QFC + VC(Q)}{Q};\ FOC\ s.t. \frac{\partial AC(\widehat{Q})}{\partial Q} = 0.$$

Найдем объем, при котором средние издержки в соответствии с FOC минимальны. Это объем $\widehat{Q}$:

$$\frac{\partial AC(\widehat{Q})}{\partial Q} = \frac{\partial TC(\widehat{Q})}{\partial Q} \cdot \frac{1}{\widehat{Q}} + TC(\widehat{Q}) \cdot (-1) \cdot \frac{1}{\widehat{Q}^2} =$$

$$= \frac{1}{\widehat{Q}} \cdot \left[\frac{\partial TC(\widehat{Q})}{\partial Q} - \frac{TC(\widehat{Q})}{\widehat{Q}} \right] = 0.$$

По определению, $MC(Q) = \dfrac{\partial TC(Q)}{\partial Q}$ и $AC(Q) = \dfrac{TC(Q)}{Q}$. Должно выполняться: $\dfrac{1}{\widehat{Q}} \neq 0$. Тогда из условия первого порядка получим: $AC(\widehat{Q}) = MC(\widehat{Q})$. Таким образом, экстремума функция $AC(Q)$ достигает при объеме выпуска $\widehat{Q}$.

Форма кривой $MC(Q)$ и наличие постоянных и квазипостоянных издержек предопределяют U-образную форму кривой $AC(Q)$. Значит, экстремум функции $AC(Q)$ является минимумом, а не максимумом.

2. С учетом конфигураций кривых издержек всех видов представим их динамику и точки минимумов на графике (рис. 3.14).

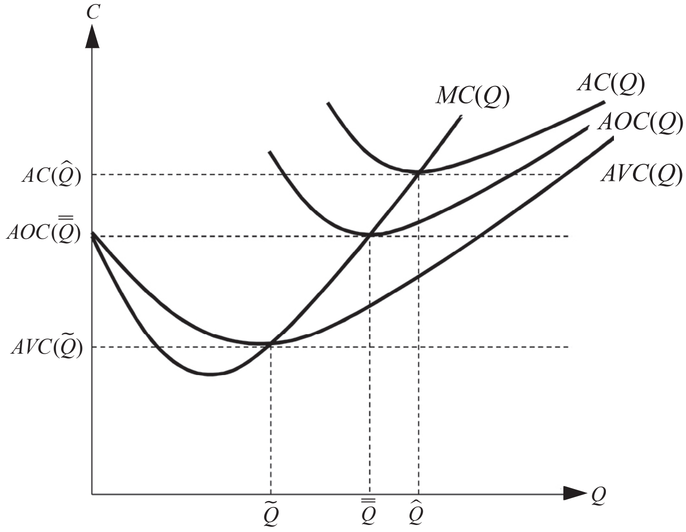

Рис. 3.14. Точки минимумов средних переменных, средних операционных и средних издержек

3. Сделаем несколько предварительных замечаний.

(1) Структура издержек предопределяет тот факт, что средние издержки для любого объема выпуска – больше, чем средние операционные, а средние операционные издержки – больше, чем средние переменные издержки для любого объема выпуска. То есть $AC(Q) > AOC(Q) > AVC(Q)$ для любого объема выпуска.

(2) Точки минимумов средних переменных, средних и операционных издержек лежат на восходящей ветви кривой предельных издержек. Следовательно $\hat{Q} > \bar{\bar{Q}} > \tilde{Q}$.

(3) На восходящей ветви предельные издержки – возрастающая функция объема выпуска: $\frac{\partial MC(Q)}{\partial Q} > 0.$

Сделанные замечания обусловливают следующие соотношения минимальных величин издержек: $AC(\hat{Q}) > AOC\,(\overline{\overline{Q}}) > AVC(\widetilde{Q})$. Сказанное подтверждается и графиками (см. рис. 3.14).

Задание 3.4

Представьте графически динамику предельных, средних переменных и средних издержек для случаев, когда предельный продукт переменного фактора вида *v*:

(*а*) неизменен;

(*б*) перманентно возрастает;

(*в*) перманентно снижается.

Решения и ответы

Прежде чем приступить к выполнению данного задания, целесообразно ознакомиться с решением задания 1.1 и содержанием подраздела 3.2.

(*а*) Тот факт, что MP_v = const, предопределяет неизменность среднего продукта переменного фактора вида *v*. Постоянная величина предельного продукта обусловливает независимость предельных производственных затрат от объема выпуска и неизменность предельных издержек. Из того, что средний продукт переменного фактора вида *v* – величина неизменная, следует, что и средние производственные затраты этого фактора, и средние переменные издержки не будут зависеть от объема выпуска. Более того, поскольку (как было показано в задании 1.1) $MP_v = AP_v$, $MC = AVC$.

Величина средних издержек фирмы будет убывать по мере увеличения объема выпуска. Такая тенденция предопределена динамикой $AFC(Q)$:

$$\frac{\partial AFC(Q)}{\partial Q} < 0.$$

Динамика издержек представлена на рис. 3.15.

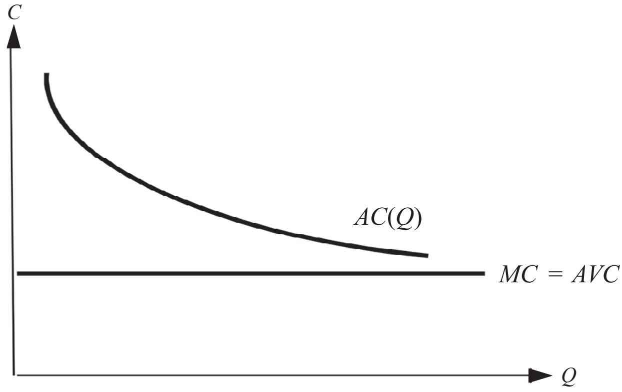

Рис. 3.15. Динамика предельных, средних переменных
и средних издержек фирмы
(предельный продукт переменного фактора – константа)

(*б*) Предельный продукт – возрастающая функция затрат v-го фактора производства. Тогда и средний продукт этого фактора будет возрастать, но медленнее, чем предельный продукт.

Из сказанного следует, что предельные и средние затраты v-го фактора – убывающие функции объема выпуска. Средние издержки будут также убывать по мере увеличения объема выпуска. Однако в силу того, что величина $AFC(Q)$ с ростом выпуска будет становиться все меньше, дистанция между кривыми $AC(Q)$ и $AVC(Q)$ начнет уменьшаться. Графическая иллюстрация данной ситуации приведена на рис. 3.16.

(*в*) Предельный продукт – убывающая функция затрат фактора вида v. Предположим, что функция предельного продукта линейна. Тогда средний продукт этого фактора также будет линейной убывающей функцией затрат фактора. При этом средний продукт меняется медленнее, чем предельный продукт.

Из сказанного следует, что предельные и средние затраты v-го фактора – возрастающие функции объема выпуска. Средние издержки будут иметь U-образную форму, задаваемую убывающим характером $AFC(Q)$ и уменьшением их величины (и роли) по мере роста выпуска. $AC(Q)$ будут убывать по мере увеличения объема выпуска, пока не сравняются с предельными издержками. Затем $AC(Q)$ начи-

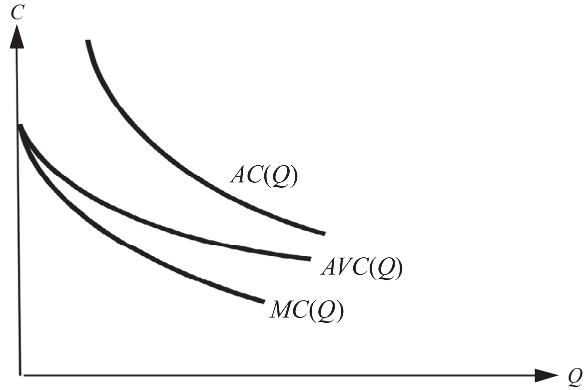

Рис. 3.16. Динамика предельных, средних переменных
и средних издержек фирмы
(предельный продукт переменного фактора перманентно возрастает)

нают расти: более сильной оказывается тенденция, определяемая ростом $AVC(Q)$, тогда как понижательная тенденция, задаваемая динамикой $AFC(Q)$, сходит на нет. В силу того что величина $AFC(Q)$ с ростом выпуска будет становиться все меньше, дистанция между кривыми $AC(Q)$ и $AVC(Q)$ начнет уменьшаться. Графическая иллюстрация данной ситуации приведена на рис. 3.17.

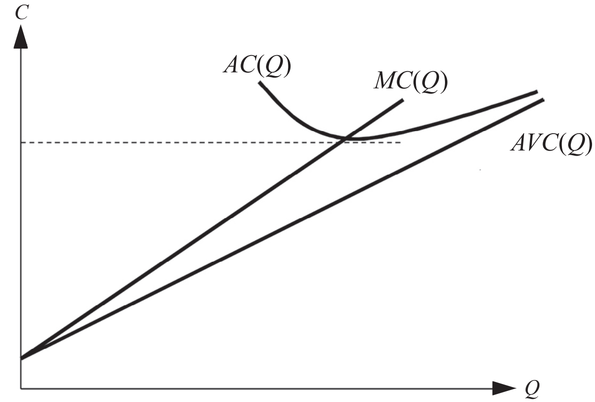

Рис. 3.17. Динамика предельных, средних переменных
и средних издержек фирмы
(предельный продукт переменного фактора перманентно убывает)

Задание 3.5

Производственная функция фирмы непрерывна и имеет вид

$$Q(\overline{R}) = \begin{cases} A_1 \cdot F_1(\overline{R}), \text{если } 0 < Q \leq 1\,000, \\ A_2 \cdot F_2(\overline{R}), \text{если } Q \geq 1\,000. \end{cases}$$

Известно, что $F_1(\overline{R})$ – однородная функция степени $k > 1$, а $F_1(\overline{R})$ – однородная функция степени $0 < t < 1$.

Необходимо схематично представить вид функции долгосрочных средних издержек.

Решение и ответ

В длительном периоде фирма имеет возможность не только варьировать затраты всех без исключения факторов, но и менять масштаб производства.

Описанная в задании фирма, судя по виду ее производственной функции, имеет изменяющуюся отдачу от масштаба. При объеме выпуска не менее 1 000 единиц продукта фирма имеет возрастающую отдачу от масштаба, поскольку ее деятельность описывается однородной функцией степени больше единицы. При объеме выпуска от 1 000 единиц продукта отдача от масштаба убывает, поскольку производственная функция – однородная степени меньше единицы.

Динамика долгосрочных средних издержек (ACL) схематично представлена на рис. 3.18.

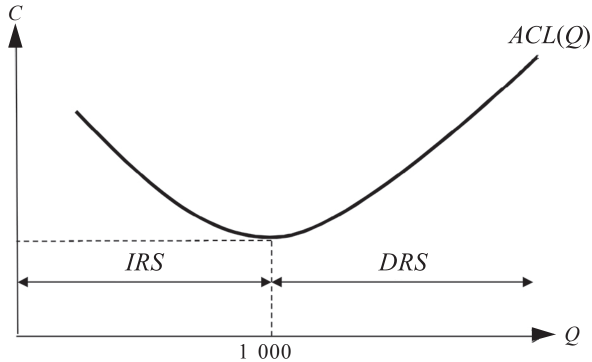

Рис. 3.18. Динамика долгосрочных средних издержек фирмы

Долгосрочные средние издержки убывают при возрастающей отдаче от масштаба и возрастают при убывающей отдаче от масштаба. Кривая долгосрочных средних издержек имеет *U*-образную форму: при выпуске 1 000 единиц продукта меняются тип отдачи от масштаба и динамика *ACL*.

4. МИНИМИЗАЦИЯ ИЗДЕРЖЕК И ОПТИМАЛЬНАЯ КОМБИНАЦИЯ ФАКТОРОВ ПРОИЗВОДСТВА

4.1. Оптимальная комбинация факторов производства

Генеральная цель деятельности фирмы – получение максимума общей прибыли ($T\pi$). Поскольку общая прибыль – функция объема выпуска, задачей фирмы является выбор оптимального объема выпуска при сложившейся на рынке цене продукта p_E. Однако общая прибыль – это разница между выручкой от реализации и понесенными издержками. Следовательно для обеспечения любого объема выпуска фирма должна применять комбинацию факторов производства, минимизирующую издержки. Решения о структуре и составе оптимальной комбинации факторов производства принимаются в сфере производства, но с учетом ограничений со стороны рынков. Тогда можно сформулировать задачу фирмы как производителя – минимизировать издержки по выпуску объема $\widetilde{Q}$. Такого типа задача должна быть решена для любого объема выпуска: $0 < Q < \infty$

Итак, модель поведения фирмы в сфере производства описывает процесс поиска оптимальной комбинации факторов производства. Такую модель (минимизация издержек при ограничении на объем выпуска) называют з а д а ч е й п р о и з в о д и т е л я. Формальный вид данной модели:

$$\begin{cases} \min\,(w_1 \cdot R_1 + w_2 \cdot R_2 + \ldots + w_m \cdot R_m), \\ \widetilde{Q} - Q(R_1, R_2, \ldots, R_m) = 0, \\ R_j \geq 0, \forall\ j = \overline{1, m}. \end{cases} \tag{4.1}$$

Задача производителя (4.1) является оптимизационной задачей. В зависимости от применяемых технологий (вида производственной функции) будем иметь классическую оптимизационную задачу, или задачу нелинейного программирования.

Модель фирмы в сфере производства (задача производителя) (4.1) применима для любых технологий и, соответственно, производственных функций.

Результатом решения задачи производителя будет являться оптимальная комбинация факторов производства, позволяющая обеспечивать объем выпуска при минимальных издержках. Оптимальная комбинация – это комбинация, которую нельзя улучшить при действующем ограничении (объеме выпуска $\tilde{Q}$). При обеспечении выпуска $\tilde{Q}$ с помощью оптимальной комбинации факторов производства минимума достигают общие издержки. Поскольку средние издержки определяются как $AC(Q) = \dfrac{TC(Q)}{Q}$, а объем выпуска строго фиксирован, при достижении минимума общих издержек минимальны будут и средние издержки для данного выпуска. Таким образом, оптимальная комбинация факторов производства позволяет минимизировать средние издержки для определенного выпуска.

Универсальным методом решения оптимизационных задач является метод неопределенных множителей Лагранжа (метод Лагранжа).

Данный метод позволит решать не только прямую задачу производителя (на минимум издержек при ограничении на объем выпуска), но и, при необходимости, – двойственную задачу (на максимум выпуска при ограничении на величину издержек).

Метод Лагранжа применим для технологий любых типов; успешно используется для определения состава оптимальной комбинации факторов при любом их количестве (m)[14].

---

[14] В случае, когда $m = 2$, поиск оптимальной комбинации факторов производства может осуществляться посредством решения задачи на условный экстремум. При $m > 2$ этот метод не применим, поскольку в модели два уравнения (целевая функция и ограничение), а количество неизвестных – более двух. Следовательно «в лоб» задача решена быть не может.

Для анализа модели фирмы в сфере производства (задачи производителя) в общем виде (4.1) с помощью метода неопределенных множителей Лагранжа необходимо построить лагранжиан (функцию Лагранжа), который далее будет минимизироваться. Для нашей модели лагранжиан – функция $(m + 1)$ переменной, где R_j – компоненты оптимальной комбинации факторов производства, а η – неопределенный множитель Лагранжа.

Экономический смысл неопределенного множителя Лагранжа в задаче на минимум издержек при ограничении на объем выпуска – расходы на дополнительную единицу выпуска, или предельные издержки.

Строим лагранжиан для задачи на минимум издержек:

$$\text{Ł}(R_1, R_2, ..., R_m, \eta) =$$
$$= w_1 \cdot R_1 + w_2 \cdot R_2 + ... + w_m \cdot R_m + \eta\left[\widetilde{Q} - Q(\overline{R})\right], \tag{4.2}$$

где $\overline{R} = (R_1,\ R_2,\ ...,\ R_m)$.

Теперь модель (4.1) модифицирована и представлена в виде функции Лагранжа (4.2). Будем решать задачу на безусловный экстремум функции Лагранжа:

$$\text{Ł}(R_1, R_2, ..., R_m, \eta) \to \min. \tag{4.3}$$

Поскольку применяемая фирмой технология неизвестна, для решения задачи необходимо использовать условия Куна – Таккера (*Kuhn – Tucker conditions*). В представленной формулировке задачи (4.1) необходимыми условиями (*FOC*) достижения лагранжианом экстремума является неотрицательность первых m частных производных (по R_j).

Предельные издержки не могут быть отрицательными и, в реальной действительности, нулевыми (тогда производная лагранжиана по η должна быть равна нулю, при этом $\eta > 0$).

Условия Куна – Таккера для задачи на минимум издержек при ограничении на объем выпуска будут иметь вид системы (4.4), состоящей из $(3m + 2)$ уравнений:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial Ł(\cdot)}{\partial R_j} = w_j - \eta^0 \cdot \dfrac{\partial Q\left(\overline{R^0}\right)}{\partial R_j} \geq 0, \forall\ j = \overline{1, m}, \quad \text{(I)} \\
\dfrac{\partial Ł(\cdot)}{\partial R_j} \cdot R_j^0 = \left[w_j - \eta^0 \cdot \dfrac{\partial Q\left(\overline{R^0}\right)}{\partial R_j} \right] \cdot R_j^0 = 0, \forall\ j = \overline{1, m}, \quad \text{(II)} \\
R_j^0 \geq 0, \forall\ j = \overline{1, m}, \quad \text{(III)} \\
\dfrac{\partial Ł(\cdot)}{\partial \eta} = \widetilde{Q} - Q\left(\overline{R^0}\right) = 0, \quad \text{(IV)} \\
\eta^0 > 0. \quad \text{(V)}
\end{cases}
\tag{4.4}
$$

Поскольку производитель может находиться в угловом равновесии или принять угловое решение – $R_j^0 \geq 0$, необходимо рассмотреть условие дополняющей нежесткости, получаемое из уравнений типа (I), (II), (III) системы уравнений (4.4).

Условие дополняющей нежесткости для прямой задачи производителя представляет собой совокупность соотношений (4.5) и (4.6):

$$
\text{если } w_j - \eta^0 \cdot \frac{\partial Q(\overline{R^0})}{\partial R_j} > 0,\ R_j^0 = 0; \tag{4.5}
$$

$$
R_j^0 > 0,\ \text{если } w_j - \eta^0 \cdot \frac{\partial Q(\overline{R^0})}{\partial R_j} = 0. \tag{4.6}
$$

Если соотношения типа (4.6) выполняются, тогда в оптимуме $R_j^0 > 0$.

Выполнение этих условий только для факторов производства k видов ($k < m$) означает, что формируется так называемый угловой оптимум; если для всех факторов производства $k = m$, формируется внутренний оптимум.

Соотношения (4.6) после ряда преобразований позволяют получить условие оптимальности[15] для задачи производителя:

$$\frac{w_1}{MP_1^0} = \frac{w_2}{MP_2^0} = \ldots = \frac{w_k}{MP_k^0} = \eta^0, \qquad (4.7)$$

где $MP_j^0 \equiv MP_j\left(\overline{R^0}\right) \equiv \frac{\partial Q(\overline{R^0})}{\partial R_j}$.

Экономический смысл условия оптимальности состоит в том, что оптимальную комбинацию факторов производства невозможно улучшить: невозможно снизить издержки ни по одному из направлений, поскольку одинаково (и равно величине предельных издержек) соотношение цен и предельных продуктов по всем факторам производства. Условие оптимальности означает, что экономическая эффективность факторов производства, участвующих в выпуске последней единицы из объема $\widetilde{Q}$, одинакова и равна величине предельных издержек для выпуска $\widetilde{Q}$.

Из условия дополняющей нежесткости [соотношения (4.5) и (4.6)], а также условия оптимальности (4.7) можно сделать вывод, что фактор производства включается в оптимальную комбинацию ресурсов, если соотношение его цены и предельного продукта – не больше минимальной величины предельных издержек, равной η^0; в противном случае фактор исключается из производственного процесса, т. е. $R_j^0 = 0$.

В завершение рассмотрим правило определения оптимальной величины неопределенного множителя Лагранжа (η^0) для случаев «вырожденных» технологий, когда не выполняется закон убывающей отдачи (предельной производительности) фактора производства. Как правило, в подобных случаях предельные продукты всех (или отдельных) факторов производства не зависят от объема их использования, т. е. являются константами[16].

---

[15] Другое встречающееся в литературе название для условия оптимальности (4.7) производителя – *эквимаржинальный принцип*.

[16] Примером служит аддитивная производственная функция, имеющая общий вид $Q(\overline{R}) = \sum_{j=1}^{m} a_j \cdot R_j$, где a_j – положительные константы $j = \overline{1, m}$.

Правило в общем виде выглядит следующим образом:

$$\eta^0 = \min\left\{\frac{w_1}{MP_1}, \frac{w_2}{MP_2}, \ ..., \frac{w_m}{MP_m}\right\}. \qquad (4.8)$$

Следует заметить, что предельные продукты некоторых факторов производства могут быть функциями количеств этих факторов[17]. Однако на правило определения η^0 данное обстоятельство не влияет. Оптимальная величина предельных издержек (η^0) для выпуска $\widetilde{Q}$ в этом случае будет кусочно-непрерывной функцией.

Итак, рассмотрена модель поведения фирмы в сфере производства, позволяющая получить представление об оптимальной для фирмы комбинации факторов производства. Иногда оптимум (оптимальное решение) производителя называют *равновесием*. Полученная из решения задачи производителя комбинация ресурсов $\overline{R^0} = (R_1^0, R_2^0, ..., R_m^0)$ будет являться для фирмы наилучшей (оптимальной, равновесной) до тех пор, пока не изменятся либо технология, либо цены факторов производства.

Оптимальные решения фирмы для различного типа технологий будут детально рассмотрены далее в подразделе 4.2 и в подразделе «Типовые задания…» данной главы.

4.2. Графический анализ оптимума производителя

Наглядность совершаемого фирмой выбора обеспечивается использованием графического метода анализа. Данный метод работает исключительно для случая технологий, предусматривающих использование двух факторов производства. Рассмотрим на его основе оптимальные решения фирмы в сфере производства для технологий основных типов.

---

[17] Такого рода ситуация возникает в случае, например, квазилинейной производственной функции вида $Q(R_1, R_2) = aR_1 + b \cdot f(R_2)$, где a, b – положительные константы.

При формировании оптимальной комбинации факторов производства фирма сталкивается с технологическим ограничением. Иначе говоря, фирма для обеспечения выпуска $\widetilde{Q}$ должна выбрать одну из комбинаций факторов, принадлежащих определенной изокванте[18].

Каков критерий выбора фирмой комбинации факторов (независимо от того, привлекаются ли ресурсы через рынки или используются факторы производства, принадлежащие самой фирме)? Ответ на вопрос содержится в постановке задачи производителя: выбирается та комбинация факторов производства, которая позволяет обеспечить выпуск $\widetilde{Q}$ самым дешевым способом.

Будем исходить из предположения, что выпуск обеспечивается фирмой посредством использования в производственном процессе двух факторов – труда (L) и капитала (K).

Проведем графический анализ издержек. Устоявшиеся в экономической литературе обозначения для цен труда и капитала – w (*wage*) и r (*rent rate*) соответственно. Уровни общих издержек (денежных затрат по формированию комбинаций из труда и капитала) могут быть разными. Относительные цены факторов производства: $\frac{w}{r}$. Каждому уровню общих издержек будет соответствовать своя изолиния, состоящая из разных по составу комбинаций ресурсов. Каждая такая линия – и з о к о с т а, или прямая равных издержек. Изокосты располагаются в первом квадранте по причине того, что факторы производства либо вовлекаются в производственный процесс, либо не используются ($L \geq 0$; $K \geq 0$). Изокосты имеют угол наклона α, тангенс которого – отрицательная величина, поскольку увеличение затрат одного из факторов при сохранении уровня общих издержек требует уменьшения затрат другого фактора. То есть $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{w}{r}$. На рис. 4.1 представлено семейство изокост для комбинаций факторов, состоящих из труда и капитала и формируемых при сложившихся на рынках факторов производства ценах (w, r).

---

[18] Конфигурация изоквант для производственных функций различных типов была подробно рассмотрена в главе 1.

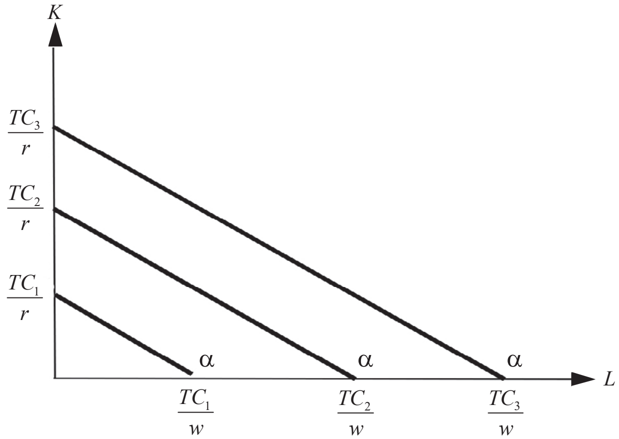

Рис. 4.1. Семейство изокост для комбинаций факторов, состоящих из труда и капитала

Примем предположение о том, что технология, применяемая фирмой, описывается производственной функцией Кобба – Дугласа. Тогда задача производителя будет иметь такой вид:

$$\begin{cases} \min\,(w \cdot L + r \cdot K), \\ \widetilde{Q} - AL^a K^b = 0, \\ L \geq 0, K \geq 0. \end{cases} \tag{4.9}$$

Далее представим на графике семейство изокост и изокванту для выпуска $\widetilde{Q}$ (рис. 4.2).

Приведенные на рис. 4.2 комбинации факторов A, B, C, E позволяют обеспечить выпуск на уровне $\widetilde{Q}$. Издержки по формированию комбинаций A, B, C – выше, чем издержки на комбинацию E (для нее издержки по выпуску $\widetilde{Q}$ – наименьшие, и дальнейшее снижение издержек невозможно). Следовательно комбинация труда и капитала E является оптимальной. В точке E одна из изокост – касательная к изокванте $\widetilde{Q}$. Наклон касательной к изокванте в соответствии с соотношением (1.12) характеризует предельную норму технического замещения в точке E – $MRTS^E_{KL}$.

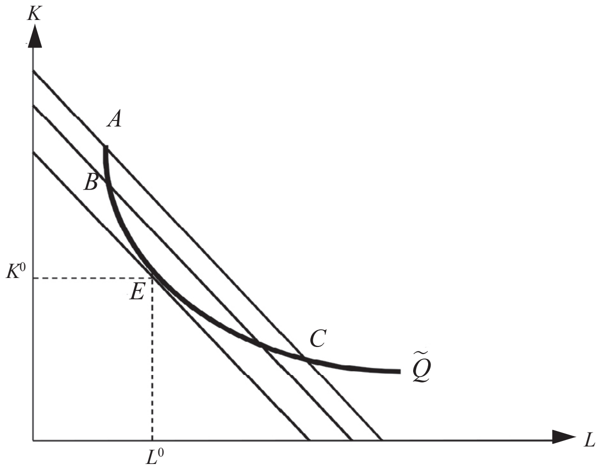

Рис. 4.2. Выбор оптимальной комбинации труда и капитала (производственная функция Кобба – Дугласа)

Одновременно с этим наклон изокост определяется как $-\frac{w}{r}$.

Тогда

$$MRTS_{KL}^{E} = -\frac{w}{r} \text{ или } \frac{MP_{L}^{E}}{MP_{K}^{E}} = \frac{w}{r}. \tag{4.10}$$

Из условия (4.10) после ряда преобразований получим:

$$\frac{r}{MP_{K}^{E}} = \frac{w}{MP_{L}^{E}}. \tag{4.11}$$

Балансовое уравнение (4.11) – не что иное, как условие оптимальности для задачи производителя, использующего два фактора – «труд» и «капитал».

Таким образом, при графическом решении задачи получен тот же результат, который дал формальный анализ модели фирмы, формирующей оптимальную комбинацию факторов.

Рассмотрим технологию, описываемую аддитивной производственной функцией вида $Q(L, K) = A \cdot (aL + bK)$, для которой предельные продукты труда и капитала – положительные константы. Задача производителя будет подобна той, которая была рассмотрена для функции Кобба – Дугласа (4.9). В этом случае возможно угловое решение или же оптимальная комбинация факторов определяется неоднозначно (одна из изокост совпадает с изоквантой для выпуска $\widetilde{Q}$). Графическая иллюстрация углового оптимума производителя представлена на рис. 4.3.

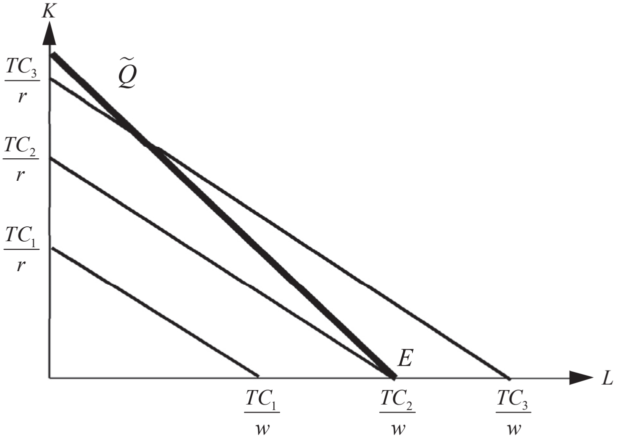

Рис. 4.3. Угловой оптимум (угловое решение)

Наклон изокванты (жирная линия) – α, тангенс угла наклона: $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{a}{b}$. Тангенс угла наклона изокост: $\operatorname{tg}\beta = -\dfrac{w}{r}$. При этом $\operatorname{tg}\alpha \neq \operatorname{tg}\beta$. Оптимума фирма достигает при формировании комбинации, соответствующей точке E: в оптимальной комбинации будет присутствовать только один фактор – «труд», поскольку $|\operatorname{tg}\alpha| > |\operatorname{tg}\alpha|$ и, следовательно, $\dfrac{w}{a} < \dfrac{r}{b}$. При ином соотношении предельных продуктов и цен факторов в оптимальной комбинации может присутствовать только капитал. Или же, как отмечалось выше, возможно совпадение одной из изокост с изоквантой.

В случае, когда производственный процесс фирмы описывается функцией леонтьевского типа $Q(L, K) = A \cdot \min\{aL; bK\}$, технологически эффективна только одна технология. Пропорция, в которой факторы вводятся в производство, определяется как $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{K^*}{L^*} = \dfrac{a}{b}$. Оптимальная комбинация факторов производства лежит на луче технологии: $K^* = \dfrac{a}{b}L^*$. Графический анализ оптимума фирмы с производственной функцией леонтьевского типа представлен на рис. 4.4.

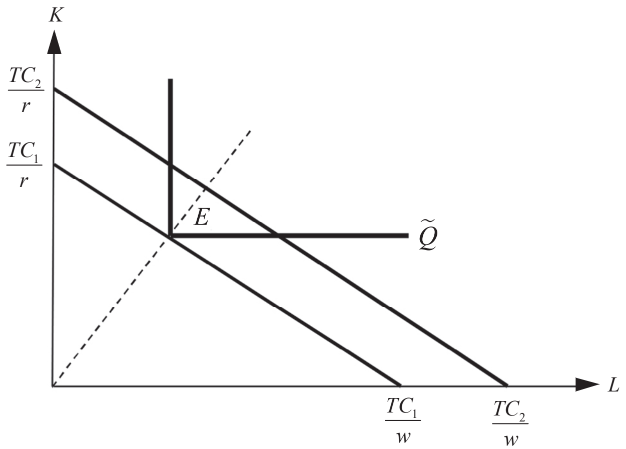

Рис. 4.4. Оптимум для фирмы, использующей одну технологию

Рассмотрев оптимальные решения о составе комбинации применяемых факторов производства, обратимся к анализу спроса на ресурсы, который зависит от того, каков оптимальный объем вводимого фактора.

4.3. Функции условного спроса на факторы производства

Функции спроса на факторы производства позволяют не только охарактеризовать поведение фирмы на рынках ресурсов и ее реакцию на изменение конъюнктуры этих рынков, но и выявить функциональную зависимость издержек от объема выпуска.

Спрос на факторы производства (*derived factor demand*) всегда имеет производный характер. То есть спрос на ресурс зависит от конъюнктуры рынка конечного продукта, но не напрямую, а косвенно, через цену выпускаемого продукта. В коротком периоде спрос на труд является безусловным: увеличение выпуска при фиксированном запасе капитала возможно только за счет увеличения затрат труда. Спрос на труд как переменный фактор, таким образом, носит безусловный характер. Краткосрочные функции спроса будут рассмотрены в главе 5, после обсуждения проблемы выбора объема выпуска, максимизирующего общую прибыль.

Итак, обратимся к анализу функций условного спроса на факторы производства (*conditional factor demand functions*).

Логика и алгоритм анализа таковы:

(1) ставим и решаем задачу на минимум издержек;

(2) находим структуру оптимальных комбинаций;

(3) выражаем количества всех факторов через количество одного из них, например j-го;

(4) преобразуем производственную функцию, представляем ее в виде функции затрат только j-го фактора;

(5) находим зависимость j-го фактора от объема выпуска; это и есть функция спроса на фактор производства j-го вида.

Этот алгоритм рассмотрим применительно к производственным функциям трех основных видов.

В данном подразделе сохраним предположение, что фирма использует в производственном процессе только два ресурса – труд и капитал. В таком случае функции условного спроса фирмы на факторы производства имеют вид $L = \varphi(w, r, Q)$; $K = \psi(w, r, Q)$.

Постановка задачи производителя и ее решения для основных видов производственных функций подробно рассматривались в подразделах 4.1 и 4.2. Используем полученные результаты.

Если фирма применяет технологии, описываемые производственной функцией Кобба – Дугласа [$Q(L, K) = AL^aK^b$], она формирует внутренний оптимум, т. е. выполняется условие оптимальности (4.11) и $\left|MRTS^E_{KL}\right| = \dfrac{w}{r}.$ Вспомним о полезном свойстве функции

Кобба – Дугласа, в соответствии с которым $\left|MRTS_{KL}\right| = \dfrac{MP_L}{MP_K} = \dfrac{aK}{bL}$. Далее выпишем балансовое уравнение вида

$$\frac{aK^0}{bL^0} = \frac{w}{r}. \tag{4.12}$$

Из соотношения (4.12) получим структуру оптимальных комбинаций труда и капитала:

$$\frac{K^0}{L^0} = \frac{b}{a} \cdot \frac{w}{r}, \tag{4.13}$$

а также функции, связывающие объемы труда и капитала в оптимальных комбинациях:

$$L^0 = \frac{a}{b} \cdot \frac{r}{w} \cdot K^0; \tag{4.14}$$

$$K^0 = \frac{b}{a} \cdot \frac{w}{r} \cdot L^0. \tag{4.15}$$

Преобразуем производственную функцию так, чтобы получить зависимость выпуска вначале только от затрат труда, а затем – только от затрат капитала. Получим:

$$Q(L^0, K^0(L^0)) = A(L^0)^a (\frac{b}{a} \cdot \frac{w}{r} \cdot L^0)^b; \tag{4.16}$$

$$Q(L^0(K^0), K^0) = A(\frac{a}{b} \cdot \frac{r}{w} \cdot K^0)^a (K^0)^b. \tag{4.17}$$

Функции (4.16) и (4.17) преобразуем с целью упрощения их вида, обозначая L^0 через L и K^0 через K. Затем с легкостью выводим функции условного спроса на труд – $L(w, r, Q)$ и капитал – $K(w, r, Q)$.

Условный спрос на труд (D_L) получим из функции (4.16). Функция спроса на труд, соответствующая производственной функции Кобба – Дугласа, имеет вид

$$D_L(w, r, Q) \equiv L^0 = \left[\frac{Q}{A} \cdot \left(\frac{a \cdot r}{w \cdot b}\right)^b\right]^{\frac{1}{a+b}}. \tag{4.18}$$

Условный спрос на капитал (D_K) получим из функции (4.17). Функция спроса на капитал, соответствующая производственной функции Кобба – Дугласа, имеет вид

$$D_K(w, r, Q) \equiv K^0 = \left[\frac{Q}{A} \cdot \left(\frac{w \cdot b}{r \cdot a} \right)^a \right]^{\frac{1}{a+b}}. \tag{4.19}$$

Функции условного спроса на используемые фирмой факторы производства позволяют получить конкретный вид функций общих, а затем средних издержек. Поскольку варьируются затраты всех факторов, речь идет об издержках длительного периода.

Из общего вида функции издержек $TCL(Q) = wL(Q) + rK(Q)$ и функций спроса на труд и капитал [(4.18) и (4.19) соответственно] получим:

$$TC(Q) = A^{\frac{-1}{a+b}} w^{\frac{a}{a+b}} r^{\frac{b}{a+b}} \left[\left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{b}{a+b}} + \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{-a}{a+b}} \right] \cdot Q^{\frac{1}{a+b}} =$$

$$= C \cdot Q^{\frac{1}{a+b}}, \tag{4.20}$$

где $C = \text{const} > 0$.

Из формулы (4.20) выведем функцию долгосрочных средних издержек:

$$ACL(Q) = \frac{C \cdot Q^{\frac{1}{a+b}}}{Q} = C \cdot Q^{\frac{1-(a+b)}{a+b}}. \tag{4.21}$$

Вид функции $ACL(Q)$ позволяет установить связь между динамикой долгосрочных средних издержек и типом отдачи от масштаба. Чтобы продемонстрировать тип указанной взаимосвязи, необходимо продифференцировать функцию (4.21) по Q:

$$\frac{\partial AC(Q)}{\partial Q} = \frac{1-(a+b)}{a+b} \cdot C \cdot Q^{\frac{1-2(a+b)}{a+b}}. \tag{4.22}$$

Из (4.22) следует ряд важных выводов относительно динамики долгосрочных средних издержек.

(1) Если $(a + b) > 1$, то $\dfrac{\partial AC(Q)}{\partial Q} < 0$, т. е. для отрасли присутствия фирмы характерна возрастающая отдача от масштаба, и долгосрочные средние издержки убывают по мере увеличения объема, как это показано на рис. 4.5.

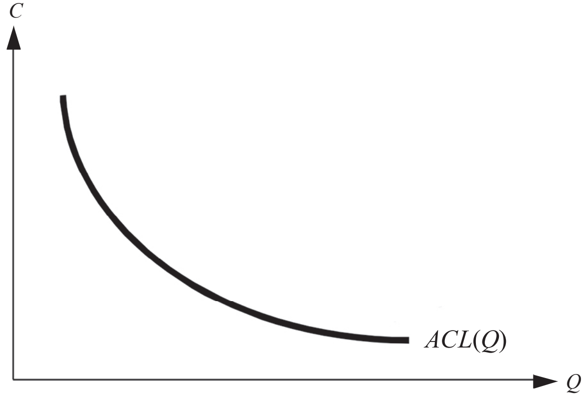

Рис. 4.5. Динамика долгосрочных средних издержек в отрасли с возрастающей отдачей от масштаба

(2) Если $(a + b) < 1$, то $\dfrac{\partial AC(Q)}{\partial Q} > 0$, т. е. для отрасли присутствия фирмы характерна убывающая отдача от масштаба, и долгосрочные средние издержки возрастают по мере увеличения объема, как это показано на рис. 4.6.

(3) Если $(a + b) = 1$, то $\dfrac{\partial AC(Q)}{\partial Q} = 0$, т. е. для отрасли присутствия фирмы характерна постоянная отдача от масштаба, и долгосрочные средние издержки не зависят от объема выпуска (рис. 4.7).

Далее рассмотрим спрос на труд и капитал со стороны фирмы, производственный процесс которой описывается функцией леонтьевского типа (1.14): $Q = A \cdot \min\,\{aL;\, bK\}$. Из задачи на минимум издержек получим структуру оптимальной комбинации факторов производства: $\dfrac{K^0}{L^0} = \dfrac{a}{b}$. Тогда единственной технологии соответст-

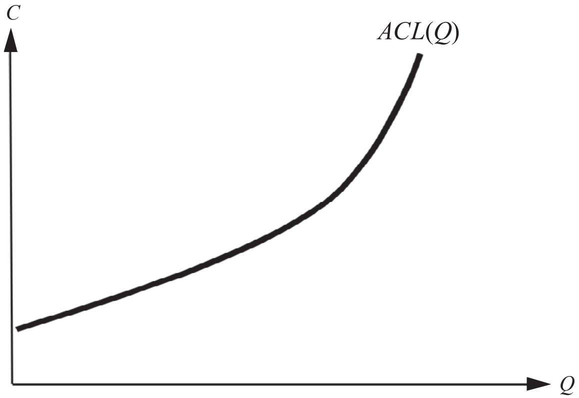

Рис. 4.6. Динамика долгосрочных средних издержек в отрасли
с убывающей отдачей от масштаба

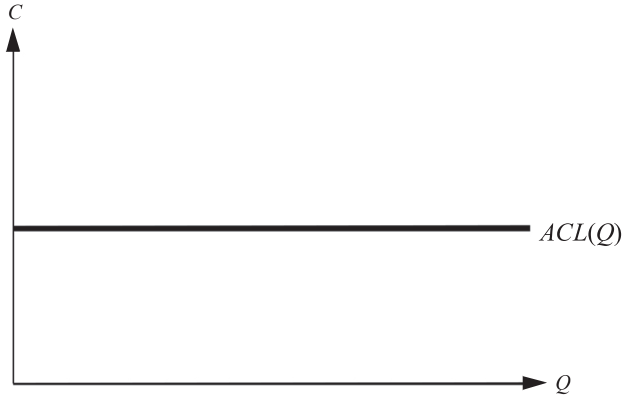

Рис. 4.7. Динамика долгосрочных средних издержек в отрасли
с постоянной отдачей от масштаба

вует равенство $Q = AaL^0 = AbK^0$, из которого можно получить функции условного спроса на труд и капитал.

Для леонтьевской производственной функции условный спрос на труд:

$$L^0 = \frac{Q}{Aa}; \tag{4.23}$$

условный спрос на капитал:

$$K^0 = \frac{Q}{Ab}. \tag{4.24}$$

Функция общих издержек длительного периода:

$$TC(Q) = w\frac{Q}{Aa} + r\frac{Q}{Ab} = \frac{Q}{A}\cdot\left[\frac{w}{a}+\frac{r}{b}\right] = $$
$$= \frac{Q}{A}\cdot\left[\frac{bw+ar}{a\cdot b}\right]. \tag{4.25}$$

Несложно обнаружить, что функция общих издержек линейна по объему выпуска. Это означает, что долгосрочные средние издержки – константа, равная $\frac{bw+ar}{A\cdot a\cdot b}$. Леонтьевская производственная функция представленного вида – однородная первой степени, это означает, что для отрасли присутствия фирмы характерна постоянная отдача от масштаба. Значит, *ACL* фирмы не зависят от объема выпуска и имеют динамику, отображенную на рис. 4.7.

В заключение рассмотрим функции условного спроса на факторы производства для аддитивной производственной функции вида $Q(L, K) = A(aL + bK)$. Из задачи на минимум издержек (4.1), условий дополняющей нежесткости [(4.5) и (4.6)] и правила для определения η^0 (4.8) получим: если $\frac{w}{a} \neq \frac{r}{b}$, фирма использует в производстве либо только труд (при условии, что $\frac{w}{a} < \frac{r}{b}$), либо только капитал (при условии, что $\frac{w}{a} > \frac{r}{b}$). Тогда функция условного спроса на труд такова:

$$D_L \equiv L^0 = \begin{cases} 0, \text{ если } w > \frac{a}{b}r, \\ \frac{Q}{Aa}, \text{ если } w \le \frac{a}{b}r. \end{cases} \tag{4.26}$$

Функция условного спроса на капитал для аддитивной производственной функции:

$$D_K \equiv K^0 = \begin{cases} 0, \text{ если } r > \dfrac{b}{a}w, \\ \dfrac{Q}{Ab}, \text{ если } r \le \dfrac{b}{a}w. \end{cases} \quad (4.27)$$

Определим вид функции общих издержек, исходя из полученных выше результатов:

$$TC(Q) = \min\left\{w\frac{Q}{Aa}; r\frac{Q}{Ab}\right\} = \frac{1}{A}Q \cdot \min\left\{\frac{w}{a}; \frac{r}{b}\right\}. \quad (4.28)$$

Долгосрочные средние издержки в этом случае не зависят от объема выпуска:

$$AC(Q) = \frac{1}{A} \cdot \min\left\{\frac{w}{a}; \frac{r}{b}\right\}. \quad (4.29)$$

Поскольку аддитивная линейная производственная функция фирмы является однородной первой степени, для отрасли присутствия фирмы характерна постоянная отдача от масштаба. Значит, как и в случае с леонтьевской производственной функцией, *ACL* фирмы не зависят от объема выпуска. Конфигурация линии долгосрочных средних издержек фирмы была отображена ранее (см. рис. 4.7).

Необходимо принимать во внимание, что любое изменение объема выпуска осуществляется в рамках того или иного временнóго интервала по разным схемам. Анализу решений фирмы об использовании комбинаций факторов производства при увеличении выпуска посвящен следующий подраздел.

4.4. Расширение производства в коротком и длительном периодах

Расширение производства (или увеличение выпуска) предполагает изменение используемой фирмой комбинации факторов производства. При этом обнаруживается движение точки, отражающей состав комбинации ресурсов, по определенной траектории (e*xpansion path – EP*), получившей в экономической литературе названия «траектория расширения производства», «траектория роста» и «путь развития». В зависимости от периода, в рамках которого фирма принимает решения, эта траектория строится по определенным правилам.

Начнем анализ с временнóго интервала, называемого длительным периодом.

Траектория расширения производства длительного периода (*long run expansion path* – EP^{LR}) – совокупность комбинаций факторов производства, применяемых для обеспечения выпуска на различных уровнях в рамках длительного временнóго интервала.

Длительный период – временной интервал, в рамках которого производитель имеет возможность варьировать затраты всех без исключения факторов, в том числе – элементов основного капитала (как активной, так и пассивной его части). Поскольку в длительном периоде производитель имеет возможность варьировать затраты всех видов применяемых ресурсов, любой объем выпуска осуществляется с помощью оптимальной (минимизирующей издержки) комбинации факторов. Если цены ресурсов не меняются, фирма, увеличивая выпуск, будет последовательно формировать комбинации ресурсов с одинаковой предельной нормой технического замещения, равной соотношению цен факторов производства[19].

Траектория расширения производства длительного периода представляет собой, таким образом, совокупность оптимальных комбинаций ресурсов, обеспечивающих выпуск на разном уровне.

Сохранив предположение о том, что фирма, организуя производственный процесс, использует два вида факторов – труд и капитал, получим возможность графического анализа траекторий расширения производства.

---

[19] Совокупности комбинаций ресурсов с одинаковыми предельными нормами технического замещения называются изоклиналями. Траектория расширения производства длительного периода, таким образом, – одна из изоклиналей.

Для однородных производственных функций с двумя ресурсами траектория расширения производства длительного периода – луч, исходящий из начала координат под углом δ. Имеет место линейная функциональная зависимость объема капитала от объема труда. Для неоднородных производственных функций такая зависимость носит нелинейный характер.

Положение траектории расширения производства длительного периода (ее угол наклона) зависит от ряда параметров.

Так, для фирмы, имеющей возможность использовать бесконечное множество технологий [факторы производства – несовершенные субституты; производственная функция Кобба – Дугласа вида $Q(L, K) = A \cdot L^a K^b$], структура оптимальных комбинаций факторов производства $\left(\frac{K^0}{L^0}\right)$ зависит от соотношения технологических эффективностей применяемых факторов $\left(\frac{a}{b}\right)$ и соотношения цен факторов производства $\left(\frac{w}{r}\right)$. Угол наклона траектории расширения производства длительного периода, определяемый структурой оптимальных комбинаций и относительными ценами факторов, как показано соотношением (4.13), есть соотношение экономических эффективностей капитала и труда:

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{K^0}{L^0} = \frac{b}{a} \cdot \frac{w}{r} = \left(\frac{b}{r}\right) \div \left(\frac{a}{w}\right). \qquad (4.30)$$

Траектория расширения производства длительного периода для фирмы с производственной функцией Кобба – Дугласа отображена на рис. 4.8.

Для фирмы, имеющей единственную технологию (производственная функция леонтьевского типа: $Q = A \cdot \min\{aL; bK\}$; труд и капитал – совершенные комплементарии), структура оптимальных комбинаций факторов производства определяется соотношением технологических эффективностей (предельных продуктов) труда и капитала: $\left(\frac{a}{b}\right)$. Таким образом, траектория расширения

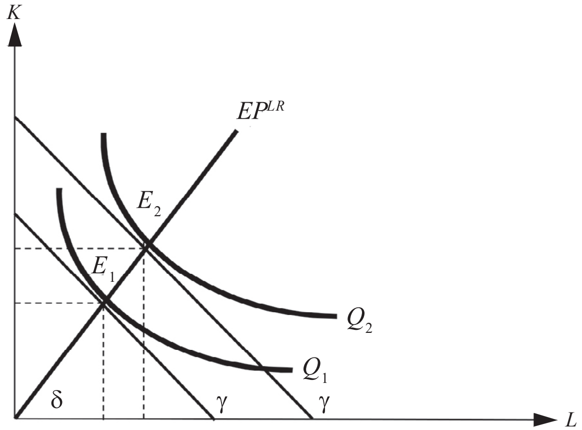

Рис. 4.8. Траектория расширения производства длительного периода для производственной функции Кобба – Дугласа

производства длительного периода представляет собой луч, исходящий из начала координат под углом δ; $\operatorname{tg}\delta = \frac{a}{b}$.

Фирмы с аддитивными линейными производственными функциями в случае несовпадения экономических эффективностей труда и капитала используют в длительном периоде или только труд, или только капитал. Тогда если выше экономическая эффективность труда, траектория расширения производства длительного периода – прямая, совпадающая с положительным направлением оси абсцисс; если более высокую экономическую эффективность имеет капитал, траектория расширения производства длительного периода – прямая, совпадающая с положительным направлением оси ординат.

Перейдем к анализу решений, принимаемых фирмой в краткосрочном временно́м интервале.

В рамках короткого периода запас некоторых ресурсов остается неизменным. В первую очередь это касается запаса основного капитала. В данном случае увеличение выпуска становится возможным за счет увеличения количества переменных факторов в производственном процессе. Увеличение количества переменных факторов (при фиксированных объемах постоянных факторов) происходит до полного насыщения производственного процесса переменным ресурсом.

Для фирмы, использующей два фактора производства – труд и капитал, сказанное выше означает, что в коротком периоде фирма не в состоянии изменить запас капитала, тогда как объем привлечения труда может варьироваться в зависимости от желаемого уровня выпуска. Следовательно фактор «капитал» по отношению к переменному фактору «труд» может быть или абсолютно недостаточным, или абсолютно избыточным. Наличие избыточного (или недостаточного) фактора предопределяет вынужденное превышение средними издержками их минимального значения. Средние издержки минимальны, когда используется комбинация факторов производства, в которой труд и капитал (имеющийся в коротком периоде в фиксированном объеме) сочетаются наилучшим образом. Такая комбинация характеризуется тем, что средний продукт туда достигает максимума (см. рис. 1.3) и обеспечивает выпуск на уровне Q^0. То есть в коротком периоде существует только одна оптимальная (минимизирующая издержки) комбинация ресурсов. Кроме этого необходимо принимать во внимание ограничение по объему выпуска, упоминавшееся в подразделе 3.2 при обсуждении динамики краткосрочных издержек. В коротком периоде максимально возможный выпуск детерминируется наличным запасом капитала и не может превосходить тот объем, при котором наступает полное насыщение производственного процесса переменным фактором. Этот объем $[Q^{**} = F(L^{**}, \overline{K})]$ в соответствии с обозначениями, использованными на рис. 1.3, определяется такой комбинацией факторов, в которой предельный продукт переменного фактора (в нашем случае – труда) становится равным нулю. Таким образом, Q^{**} – предел расширения производства в коротком периоде.

Траектория расширения производства короткого периода (*short run expansion path* – EP^{ShR}) – совокупность комбинаций ресурсов, применяемых для обеспечения выпуска на различных уровнях в рамках короткого временно́го интервала.

На рис. 4.9 представлена траектория расширения производства короткого периода для фирмы с производственной функцией Кобба – Дугласа, имеющей в своем распоряжении запас капитала $\overline{\overline{K}}$.

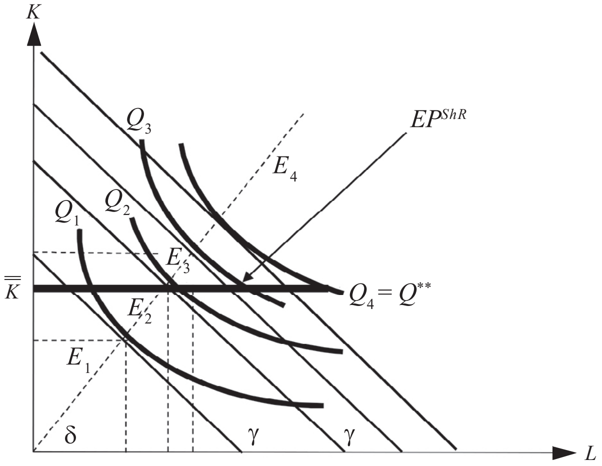

Рис. 4.9. Траектория расширения производства короткого периода (производственная функция Кобба – Дугласа)

Оптимальными для выпусков Q_1, Q_2 , Q_3 и Q_4 являются комбинации E_1, E_2, E_3 и E_4 соответственно. В коротком периоде фирма, увеличивая выпуск, не может применять оптимальные комбинации факторов производства для каждого объема выпуска. Она вынужденно использует такие, в которых фиксированное количество капитала ($\overline{\overline{K}}$) сочетается с возрастающим объемом использования труда. Иначе наблюдается движение по горизонтальной линии EP^{ShR} вплоть до достижения предельного объема выпуска короткого периода – Q^{**} (на рис. 4.9 это объем Q_4). Применяемые комбинации не оптимальны, за исключением комбинации E_3 – единственной комбинации факторов производства, обеспечивающей выпуск на уровне Q_3 при минимальных издержках. Следовательно именно при выпуске Q_3 краткосрочные средние издержки достигают минимума.

Аналогичным образом может быть продемонстрирована траектория расширения производства короткого периода для фирмы с производственной функцией леонтьевского типа (рис. 4.10).

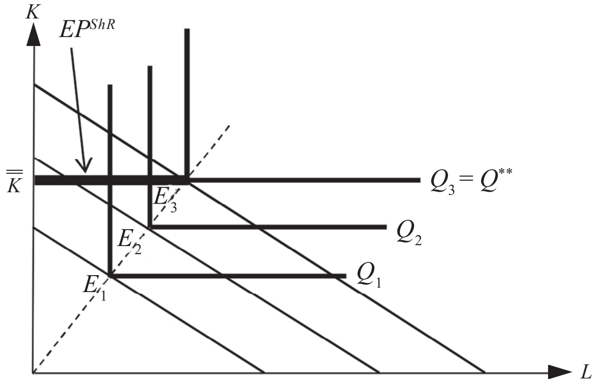

Рис. 4.10. Траектория расширения производства короткого периода (леонтьевская производственная функция)

Следует обратить внимание на то обстоятельство, что конфигурация траектории расширения производства короткого периода не зависит от относительных цен ресурсов: если объем использования капитала фиксируется по оси ординат, она – горизонтальная прямая, отстоящая от начала координат на расстояние, определяемое запасом капитала. Если запас капитала в рамках данного временнóго интервала отличен от запаса в исходном коротком периоде, произойдет параллельный сдвиг траектории расширения производства короткого периода и изменится ее длина. Траектория расширения производства короткого периода сместится параллельно вниз и станет короче при уменьшении, по тем или иным причинам, запаса капитала; сместится параллельно вверх и удлинится при увеличении запаса капитала. Влияние изменений в запасе капитала на положение траектории расширения производства в коротком периоде представлено на рис. 4.11.

Таким образом, можно утверждать, что увеличение запаса капитала способствует расширению возможностей производства в коротком периоде (увеличивается максимально возможный

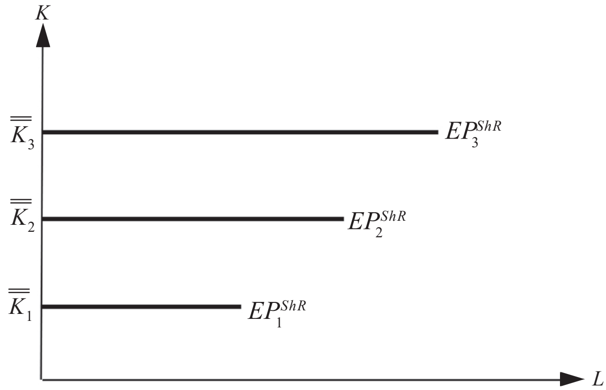

Рис. 4.11. Влияние запаса капитала на траекторию расширения производства короткого периода

краткосрочный выпуск), а уменьшение запаса капитала приводит к сокращению возможностей расширения производства (максимально возможный краткосрочный выпуск уменьшается).

4.5. Выявленная минимизация издержек

В реальной жизни производственные функции не наблюдаемы. Однако фирмы принимают решения об объемах выпуска с помощью определенной комбинации факторов производства. Стремясь максимизировать собственную общую прибыль, фирмы выбирают для любого объема выпуска Q такие комбинации факторов производства, которые позволяют минимизировать общие издержки. Постараемся доступными способами оценить последствия для наблюдаемого выбора изменений в ценах факторов производства, а затем рассмотрим последствия изменения объема выпуска для величины общих издержек. Для этих целей воспользуемся принципом выявленной минимизации издержек (*revealed cost minimization*)[20].

---

[20] См.: *Вэриан Х. Р.* Микроэкономика. Промежуточный уровень. Современный подход. М. : ЮНИТИ, 1997. С. 376–377; или: *Varian H. R.* Intermediate Microeconomics. A Modern Approach. Third Ed. NY ; L. : W. W. Norton & Company, 1993. P. 337–338.

Пусть для обеспечения выпуска на уровне Q^ при ценах w_1, r_1 фирма выбирала комбинацию факторов производства L_1, K_1, а при ценах w_2, r_2 – комбинацию L_2, K_2. При этом $Q(L_1, K_1) = Q(L_2, K_2) = Q$^.

Тогда если каждая формируемая комбинация ресурсов минимизировала издержки при соответствующих ценах, должны выполняться следующие условия:

$$\begin{cases} w_1 L_1 + r_1 K_1 \le w_1 L_2 + r_1 K_2, \\ w_2 L_2 + r_2 K_2 \le w_2 L_1 + r_2 K_1. \end{cases} \tag{4.31}$$

Иначе говоря, если фирма всегда выбирает такой способ производства (комбинацию факторов производства) для объема Q^, который минимизирует ее издержки, то комбинации факторов, сформированные при каждой из систем цен, должны удовлетворять неравенствам системы (4.31). Эти неравенства называются слабой аксиомой минимизации издержек (*weak axiom of cost minimization – WACM*).

Преобразуем неравенства системы (4.31). Второе неравенство запишем в виде

$$-(w_2 L_1 + r_2 K_1) \le -(w_2 L_2 + r_2 K_2). \tag{4.32}$$

Сложим первое неравенство из системы (4.31) и неравенство (4.32):

$$w_1 L_1 + r_1 K_1 - w_2 L_1 - r_2 K_1 \le w_1 L_2 + r_1 K_2 - w_2 L_2 - r_2 K_2. \tag{4.33}$$

Последовательно объединяя элементы неравенства (4.33), в результате преобразований получим:

$$(w_2 - w_1) \cdot (L_2 - L_1) + (r_2 - r_1) \cdot (K_2 - K_1) \le 0. \tag{4.34}$$

Неравенство (4.34) представим в виде суммы изменений цен и объемов труда и капитала:

$$\Delta w \cdot \Delta L + \Delta r \cdot \Delta K \le 0. \tag{4.35}$$

Слабая аксиома минимизации издержек (*WACM*) и неравенство (4.35) как результат анализа *WACM* позволяют получить ряд важных выводов о динамике спроса на факторы производства и динамике общих издержек при изменении цен ресурсов и неизменном выпуске.

Первый важный вывод касается динамики спроса на факторы производства.

Если цена труда возрастет, а цена капитала не изменится ($\Delta r = 0$), то неравенство (4.35) приобретет вид $\Delta w \cdot \Delta L \leq 0$.

То есть если $\Delta w > 0$, то $\Delta L \leq 0$ или $L_2 \leq L_1$; если цена труда снизится, объем использования труда возрастет или останется неизменным: при $\Delta w < 0$ наблюдаем $\Delta L \geq 0$ или $L_2 \geq L_1$. Следовательно кривая условного спроса на труд имеет неположительный наклон.

К фактору «капитал» применимы те же самые рассуждения. Если цена капитала возрастет, а цена труда останется без изменения ($\Delta w = 0$), то неравенство (4.34) приобретет вид $\Delta r \cdot \Delta K \leq 0$. Иначе: если $\Delta r > 0$, то $\Delta K \leq 0$ или $K_2 \leq K_1$; если цена капитала снизится, объем использования капитала либо возрастет, либо не изменится: при $\Delta r < 0$ наблюдаем $\Delta K \geq 0$ или $K_2 \geq K_1$. Следовательно кривая условного спроса на капитал имеет неположительный наклон.

Второй вывод, который можно сделать на основе анализа *WACM* и неравенства (4.35), касается влияния изменений цен факторов производства на величину общих издержек. При изменении относительных цен факторов производства происходит изменение структуры применяемой для выпуска $Q^\wedge$ комбинации факторов – относительно подорожавший фактор производства заменяется относительно подешевевшим, а общие издержки по формированию комбинации ресурсов возрастают. Иллюстрация данного вывода для случая повышения цены труда (ставки заработной платы, w) приведена на рис. 4.12.

Исходная оптимальная комбинация факторов для выпуска $Q^\wedge - \overline{E_1}$ формируется при ценах (w_1, r) таких, что наклон изокосты – α; $\operatorname{tg} \alpha = -\dfrac{w_1}{r}$, а величина общих издержек составляет TC_1. Повышение ставки заработной платы до w_2 обусловливает изменение угла наклона изокосты для уровня издержек TC_1, наклон изокосты теперь – β; $\operatorname{tg} \beta = -\dfrac{w_2}{r}$; $|\operatorname{tg} \beta| > |\operatorname{tg} \alpha|$. При издержках TC_1 обеспечить выпуск $Q^\wedge$ невозможно. Сохранение выпуска на преж-

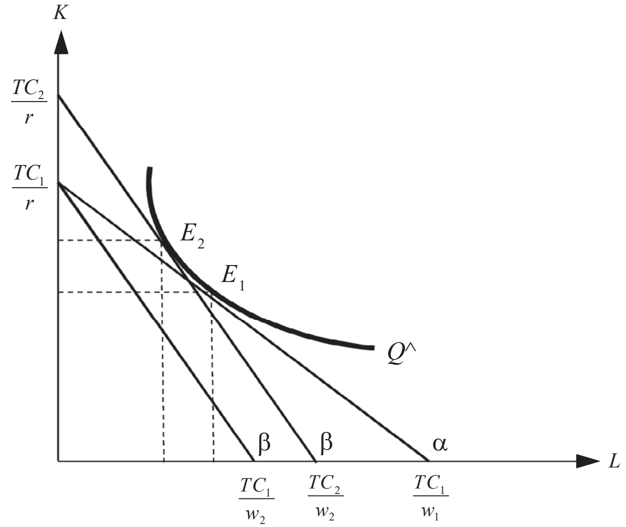

Рис. 4.12. Влияние повышения ставки заработной платы на величину издержек

нем уровне в новых ценовых условиях позволяет комбинация факторов $\overline{E_2}$, требующая на свое формирование издержек на уровне TC_2, таком, что $TC_2 > TC_1$. Следовательно увеличение цены труда предопределило увеличение общих издержек для фиксированного выпуска. Применив подобные рассуждения к изменению цены капитала, сделаем результирующие выводы:

$$\frac{\partial TC(Q)}{\partial w} > 0 \text{ и } \frac{\partial TC(Q)}{\partial r} > 0. \tag{4.36}$$

Третий важный вывод, который позволяет сделать анализ выявленной минимизации издержек, состоит в оценке влияния объема выпуска на величину общих издержек при неизменных ценах факторов производства. Закономерность здесь следующая: изменение общих издержек и изменение выпуска – однонаправленны, т. е. при увеличении выпуска будет наблюдаться увеличение общих издержек и, наоборот, снижение выпуска обусловит снижение общих издержек. Иллюстрация этого утверждения приведена на рис. 4.13.

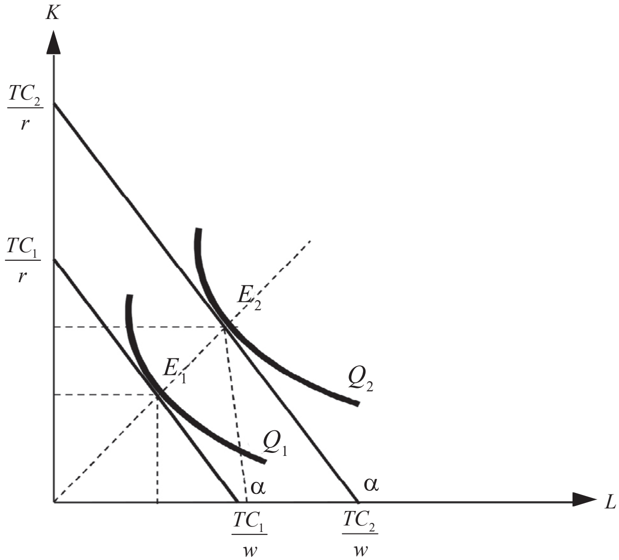

Рис. 4.13. Влияние увеличения объема выпуска на величину издержек

Фирма принимает решения при ценах факторов производства (w, r) таких, что наклон семейства изокост – α; $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{w}{r}$. Изначально фирма выпускает объем Q_1, используя комбинацию факторов $\overline{E_1}$, общие издержки на формирование которой – TC_1. Увеличение выпуска до уровня Q_2 предопределяет необходимость применения комбинации факторов $\overline{E_2}$, которая требует издержек на уровне TC_2. Таким образом, увеличение объема выпуска вызывает увеличение общих издержек. Формально

$$\frac{\partial TC(Q)}{\partial Q} > 0. \qquad (4.37)$$

Итак, на основе принципа выявленной минимизации издержек можно получить те же выводы, которые дает формальный анализ.

Типовые задания с решениями и ответами

Задание 4.1

В производственном процессе фирма использует два ресурса – труд и капитал. Ее производственная функция имеет вид $Q(L, K) = 9 \cdot L^{\frac{1}{3}} K^{\frac{2}{3}}$. Объем выпуска, который выбрала фирма, – 18 единиц продукта. Известно, что единица фактора «труд» в 32 раза дороже единицы фактора «капитал». Фирма применяет комбинацию труда и капитала – (2; 2).

(*а*) Определите величину $MRTS_{KL}$ для оптимальной комбинации.

(*б*) Может ли данная фирма, не уменьшая объема выпуска, снизить издержки? Какую комбинацию ресурсов для этого следует использовать?

(*в*) Какая комбинация ресурсов позволит фирме минимизировать средние издержки короткого периода? Каким будет объем выпуска в этом случае?

(*г*) Схематично изобразите кривую краткосрочных средних издержек данной фирмы.

Решения и ответы

(*а*) Вынесение данного пункта в самое начало может показаться странным. Однако для определения величины $MRTS_{KL}$ не требуется знать состав оптимальной комбинации факторов производства, достаточно использовать условие оптимума (4.10), согласно которому

$$\left|MRTS_{KL}^{E}\right| = \frac{w}{r}.$$

Соотношение цен факторов производства определим из условий задания: $\frac{w}{r} = \frac{32r}{r} = 32$. Следовательно $\left|MRTS_{KL}^{E}\right| = 32$.

(*б*) Для ответа на поставленный вопрос воспользуемся доказательством от противного. Пусть применяемая комбинация факторов (2; 2) – не оптимальна. Поставим и решим задачу на минимум издержек при ограничении объема выпуска 18 единицами продукта:

$$\begin{cases} \min\,(wL(18) - rK(18)), \\ 18 - 9 \cdot L^{\frac{1}{3}} K^{\frac{2}{3}} = 0, \\ L, K > 0. \end{cases}$$

В оптимуме будет выполняться условие (4.10) в форме, полученной в пункте (*а*) данного задания, т. е. $\left| MRTS^{E}_{KL} \right| = 32.$

Воспользуемся полезным свойством функции Кобба – Дугласа вида $Q(L, K) = A \cdot L^a K^b$ для определения вида $MRTS_{KL}$:

$$\left| MRTS^{E}_{KL} \right| = \frac{a}{b} \cdot \frac{K}{L}.$$

Тогда в оптимуме $\frac{1/3}{2/3} \cdot \frac{K^0}{L^0} = 32,$ следовательно $K^0 = 64L^0$.

Структура оптимальной комбинации определена (и уже на этом этапе становится понятным, что используемая фирмой комбинация труда и капитала не является оптимальной).

Найдем состав оптимальной комбинации для $Q = 18$. Для этого воспользуемся ограничением в задаче на минимум издержек. Преобразуем ограничение, представив его в виде алгебраического выражения для изокванты, отражающей выпуск на уровне $Q = 18$:

$$L^{\frac{1}{3}} K^{\frac{2}{3}} = 2 \Rightarrow L = \frac{8}{K^2}.$$

Теперь наша задача может быть представлена в виде системы из двух уравнений:

$$\begin{cases} K^0 = 64L^0, \\ L = \frac{8}{K^2}. \end{cases}$$

Решим систему уравнений и получим состав оптимальной (минимизирующей издержки по выпуску 18 единиц продукта) комбинации факторов производства: $(L^0, K^0) = \left(\frac{1}{8};\ 8\right)$. Следовательно необходимо частично отказаться от использования более дорогого и менее технологически эффективного труда и заменить его менее дорогим и более технологически эффективным капиталом.

Рассчитаем величины общих и средних издержек фирмы при использовании ею исходной и оптимальной комбинаций факторов производства:

$$TC(18(2, 2)) = 32r \cdot 2 + r \cdot 2 = 66r; \quad AC(18(2; 2)) = \frac{66r}{18} = \frac{11}{3}r;$$

$$TC\left(18\left(\frac{1}{8}, 8\right)\right) = 32r \cdot \frac{1}{8} + r \cdot 8 = 12r; \quad AC\left(18\left(\frac{1}{8}, 8\right)\right) = \frac{12r}{18} = \frac{2}{3}r.$$

Несложно увидеть, что замена менее экономически эффективного труда более эффективным с экономической точки зрения капиталом привела к снижению издержек в 5,5 раза.

(*в*) Если исходить из предположения, что фирма действует в коротком периоде и имеет запас капитала $\overline{K} = 2$, то для определения минимизирующей краткосрочные издержки комбинации факторов следует поставить задачу такого рода: комбинация факторов должна иметь оптимальную структуру и быть доступной в рамках короткого периода. Иначе говоря, нас интересует такая комбинация факторов, которая одновременно принадлежит и траектории расширения производства длительного периода (EP^{LR}), и траектории расширения производства короткого периода (EP^{ShR}).

Траектория расширения производства длительного периода (EP^{LR}) нами уже найдена, она представляет собой совокупность всех комбинаций факторов, имеющих структуру $K^0 : L^0 = 64 : 1$. Иначе, EP^{LR} такая, что $K^0 = 64L^0$.

Траектория расширения производства короткого периода (EP^{ShR}) представляет собой линию, каждая точка которой имеет координаты $(L, \overline{K}) = (L, 2)$.

Тогда можно выписать систему:

$$\begin{cases} \overline{K} = 2, \\ K^0 = 64L^0. \end{cases}$$

Решение этой системы – комбинация факторов $\overline{M} = \left(\frac{1}{32},\ 2\right)$. Данная комбинация факторов минимизирует краткосрочные средние издержки фирмы, имеющей запас производственных мощностей, определяемых двумя единицами капитала.

Рассчитаем выпуск, который может обеспечить данная комбинация факторов: $Q\left(\frac{1}{32}, 2\right) = 9 \cdot \left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} = 9 \cdot \left(\frac{4}{32}\right)^{\frac{1}{3}} = 9 \cdot \frac{1}{2} = 4,5.$ Общие издержки фирмы на обеспечение найденного объема выпуска: $TC(4,5) = 32r \cdot \frac{1}{32} + r \cdot 2 = 3r.$ Средние издержки при этом составят: $AC(4,5) = \frac{3r}{4,5} = \frac{2}{3}r.$

(*г*) Идентифицировав положение фирмы и произведя все необходимые расчеты, можем отобразить краткосрочные предельные и средние издержки фирмы на соответствующем графике (рис. 4.14).

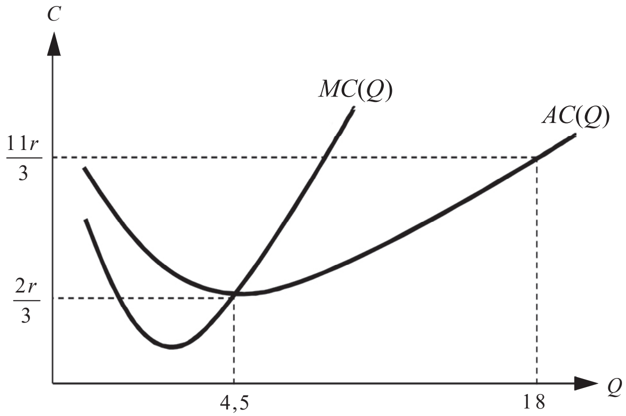

Рис. 4.14. Динамика средних издержек фирмы в коротком периоде

Анализ средних издержек (см. рис. 4.14) показывает, что выпуск 18 единиц продукта осуществляется при чрезмерно интенсивном использовании постоянного фактора, поэтому средние издержки для такого выпуска далеки от минимального уровня.

Задание 4.2

Для фирм *A*, *B* и *C* необходимо найти соотношение факторов производства, минимизирующее издержки фирмы в долгосрочном периоде.

Известно, что рыночная ставка заработной платы составляет 4 ден. ед., а ставка арендной платы за единицу капитала – 8 ден. ед.

Информация о производственных функциях всех трех фирм представлена ниже:

(*а*) $Q_A\ (L, K) = L^{0,25}K^{0,75}$;

(*б*) $Q_B\ (L, K) = L^{0,25}K^{0,5}$;

(*в*) $Q_C\ (L, K) = L^{0,5}K^{0,75}$.

Решения и ответы

Соотношение факторов производства, минимизирующее издержки фирмы в долгосрочном периоде, – не что иное, как структура оптимальных комбинаций факторов производства. Для того чтобы его найти, необходимо рассмотреть условие оптимальности для задачи на минимум издержек (4.9):

$$\begin{cases} \min\,(w \cdot L + r \cdot K), \\ \widetilde{Q} - AL^a K^b = 0, \\ L > 0, K > 0. \end{cases}$$

Условие оптимальности для данной задачи имеет вид, представленный в (4.7). Из условия оптимальности получим структуру оптимальных комбинаций факторов производства (отношение оптимального объема капитала к оптимальному объему труда), представленную в соотношении (4.13): $\dfrac{K^0}{L^0} = \dfrac{b}{a} \cdot \dfrac{w}{r}$.

Также для решения можно воспользоваться соотношением (4.30), отражающим траекторию расширения производства длительного периода.

(*а*) Структура оптимальных комбинаций для фирмы *A*:

$$\frac{K^0}{L^0} = \frac{b}{a} \cdot \frac{w}{r} = \frac{0,75}{0,25} \cdot \frac{4}{8} = \frac{3}{1} \cdot 0,5 = \frac{3}{2}.$$

(*б*) Структура оптимальных комбинаций для фирмы *B*:

$$\frac{K^0}{L^0} = \frac{b}{a} \cdot \frac{w}{r} = \frac{0,5}{0,25} \cdot \frac{4}{8} = \frac{2}{1} \cdot 0,5 = \frac{1}{1}.$$

(*в*) Структура оптимальных комбинаций для фирмы *C*:

$$\frac{K^0}{L^0} = \frac{b}{a} \cdot \frac{w}{r} = \frac{0,75}{0,5} \cdot \frac{4}{8} = \frac{3}{2} \cdot 0,5 = \frac{3}{4}.$$

Задание 4.3

Для фирмы *A*, имеющей производственную функцию Кобба – Дугласа вида $Q(L, K) = L^{0,25}K^{0,75}$, найдите:

– функции спроса на факторы производства;

– долгосрочную функцию общих издержек;

– функцию средних издержек длительного периода.

Известно, что рыночная ставка заработной платы составляет 4 ден. ед., а ставка арендной платы за единицу капитала – 8 ден. ед.

Решение и ответ

Функции спроса на факторы производства (труд и капитал) для функций типа Кобба – Дугласа представлены функциями в (4.18) и (4.19):

$$D_L(w, r, Q) \equiv L^0 = \left[\frac{Q}{A} \cdot \left(\frac{a \cdot r}{w \cdot b} \right)^b \right]^{\frac{1}{a+b}};$$

$$D_K(w, r, Q) \equiv K^0 = \left[\frac{Q}{A} \cdot \left(\frac{w \cdot b}{r \cdot a} \right)^a \right]^{\frac{1}{a+b}}.$$

Следует отметить, что такие элементы формул для определения функций спроса, как $\frac{a \cdot r}{w \cdot b}$ и $\frac{w \cdot b}{a \cdot r}$, уже определены в пункте (a) задания 4.2 и для изучаемой фирмы составляют: $\frac{w \cdot b}{a \cdot r} = \frac{3}{2}$; $\frac{a \cdot r}{w \cdot b} = \frac{2}{3}$.

Функция общих издержек длительного периода может быть получена «в лоб» через функцию (4.20):

$$TCL(Q) = A^{\frac{-1}{a+b}} w^{\frac{a}{a+b}} r^{\frac{b}{a+b}} \left[\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{b}{a+b}} + \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{-a}{a+b}} \right] \cdot Q^{\frac{1}{a+b}} = C \cdot Q^{\frac{1}{a+b}}.$$

Однако запомнить такую формулу не представляется возможным. Целесообразно, получив функции спроса на факторы производства, воспользоваться простой и понятной формулой вида $TCL(Q) = w \cdot L(Q) + r \cdot K(Q)$.

Функции спроса на факторы производства для фирмы A:

$$D_L(w, r, Q) \equiv L^0 = \left[\frac{Q}{A} \cdot \left(\frac{a \cdot r}{w \cdot b} \right)^b \right]^{\frac{1}{a+b}} = Q \cdot \left[\frac{2}{3} \right]^{\frac{3}{4}};$$

$$D_K(w, r, Q) \equiv K^0 = \left[\frac{Q}{A} \cdot \left(\frac{w \cdot b}{r \cdot a} \right)^a \right]^{\frac{1}{a+b}} = Q \cdot \left[\frac{3}{2} \right]^{\frac{1}{4}}.$$

Тогда функция общих издержек длительного периода фирмы A:

$$TLC(Q) = 4 \cdot Q \cdot \left[\frac{2}{3} \right]^{\frac{3}{4}} + 8 \cdot Q \cdot \left[\frac{3}{2} \right]^{\frac{1}{4}} = 16 \cdot \left[\frac{2}{3} \right]^{\frac{3}{4}} Q = a \cdot Q,$$

где a – константа.

Функция средних издержек длительного периода фирмы A:

$$ACL(Q) = a.$$

Ответы:

– функция спроса на труд: $D_L(w, r, Q) = Q \cdot \left[\frac{2}{3} \right]^{\frac{3}{4}}$;

– функция спроса на капитал: $D_K(w,r,Q)=Q\cdot\left[\frac{3}{2}\right]^{\frac{1}{4}}$;

– функция долгосрочных средних издержек: $TCL(Q) =$ $=16\cdot\left[\frac{2}{3}\right]^{\frac{3}{4}}Q=a\cdot Q$;

– функция долгосрочных средних издержек: $ACL(Q) = a$.

Задание 4.4

Производственная функция фирмы имеет вид $Q(L,K)=5\cdot(3L+8K)$. Цены факторов производства составляют 15 ден. ед. и 60 ден. ед. соответственно. Представьте аналитический вид функции долгосрочных общих издержек данной фирмы при условии, что цены факторов в длительном периоде не меняются.

Решение и ответ

Для того чтобы найти функцию долгосрочных средних издержек, необходимо получить представление о структуре оптимальных комбинаций факторов производства.

Поставим задачу на минимум издержек для фирмы с аддитивной линейной производственной функцией:

$$\begin{cases} \min\,(15\cdot L+60\cdot K), \\ \widetilde{Q}-\left[5\cdot(3L+8K)\right]=0, \\ L\geq 0, K\geq 0. \end{cases} \tag{1}$$

Поскольку предельные продукты факторов производства – константы, воспользуемся условием дополняющей нежесткости [соотношения (4.5) и (4.6)], а также условием на оптимальную величину неопределенного множителя Лагранжа для задачи на минимум издержек (4.8). Получим:

$$\eta^0=\min\left\{\frac{w}{MP_L},\frac{r}{MP_K}\right\}; \tag{2}$$

$$\eta^0 = \min\left\{\frac{15}{15}, \frac{60}{40}\right\} \equiv \frac{1}{5} \cdot \min\left\{\frac{15}{3}, \frac{60}{8}\right\} =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \min\left\{5, \frac{15}{2}\right\} = \frac{1}{5} \cdot 5 = 1. \quad (3)$$

Из условия дополняющей нежесткости получаем:

$$\frac{r}{MP_K} = 1{,}5 > 1 \Rightarrow K^0 = 0; \quad (4)$$

$$\frac{w}{MP_L} = 1 \Rightarrow L^0 > 0. \quad (5)$$

Следовательно в длительном периоде фирма будет обеспечивать выпуск на любом уровне только за счет использования труда[21].

Производственная функция будет иметь вид

$$Q(L) = 15L \Rightarrow L = \frac{Q}{15}. \quad (6)$$

Тогда функция долгосрочных общих издержек такова:

$$TCL(Q) = w \cdot L(Q) = w\frac{Q}{15} = 15 \cdot \frac{Q}{15} = Q. \quad (7)$$

Из функции долгосрочных общих издержек (7) получим функцию долгосрочных средних издержек:

$$ACL = \frac{TCL(Q)}{Q} = \frac{Q}{Q} = 1 = \text{const}. \quad (8)$$

Из вида функции долгосрочных средних издержек (8) понятно, что они не зависят от объема выпуска, чего и следовало ожидать,

---

[21] При ином соотношении цен и предельных продуктов факторов производства мог быть получен другой результат: фирма применяла бы только фактор «капитал», не включая фактор «труд» в оптимальные комбинации. Возможен также и вариант, когда фирме безразлично, какое сочетание факторов применить в производственном процессе. Такой сценарий может иметь место в случае, когда соотношения «цена – предельный продукт» одинаковы по обоим факторам.

Однако в любом случае обнаруживаются линейная зависимость общих издержек от объема выпуска и неизменность долгосрочных средних издержек.

поскольку аддитивная линейная производственная функция является однородной степени 1 и отражает постоянную отдачу от масштаба.

Задание 4.5

Производственная функция фирмы имеет вид $Q(L, K) = 2 \cdot \min\{5L, 8K\}$. Цены факторов производства составляют 20 ден. ед. и 40 ден. ед. соответственно. Представьте аналитический вид функции долгосрочных общих издержек данной фирмы.

Решение и ответ

Для того чтобы найти функцию долгосрочных средних издержек, необходимо получить представление о структуре оптимальных комбинаций факторов производства.

Поставим задачу на минимум издержек для данной фирмы:

$$\begin{cases} \min\,(20 \cdot L + 40 \cdot K), \\ \widetilde{Q} - \left[2 \cdot \min\left\{5L, 8K\right\}\right] = 0, \\ L \geq 0, K \geq 0. \end{cases} \quad (1)$$

Поскольку фирма использует единственную технологию, структура оптимальных комбинаций труда и капитала определяется ею:

$$5L^0 = 8K^0 \Rightarrow \frac{K^0}{L^0} = \frac{5}{8}. \quad (2)$$

Из структуры оптимальных комбинаций и вида производственной функции получим:

$$Q = 10L^0 = 16K^0 \Rightarrow L^0 = \frac{Q}{10} \text{ и } K^0 = \frac{Q}{16}. \quad (3)$$

Следовательно долгосрочная функция общих издержек имеет такой вид:

$$TCL(Q) = w \cdot L^0(Q) + r \cdot K^0(Q) = 20 \cdot \frac{Q}{10} + 40 \cdot \frac{Q}{16} =$$

$$= Q \cdot (2 + 2{,}5) = 4{,}5Q. \quad (4)$$

Из функции долгосрочных общих издержек получим функцию долгосрочных средних издержек:

$$ACL = \frac{TCL(Q)}{Q} = \frac{4{,}5 \cdot Q}{Q} = 4{,}5 = \text{const}. \qquad (5)$$

Долгосрочные средние издержки, как вытекает из (5), не зависят от объема выпуска, чего и следовало ожидать, поскольку леонтьевская производственная функция является однородной степени 1 и отражает постоянную отдачу от масштаба.

Задание 4.6

Фирма использует в производстве два фактора – труд и капитал, которые являются несовершенными субститутами. Может применяться бесконечное множество технологий (сочетаний труда и капитала в определенной пропорции). Фирма осуществляет выпуск 4 единиц готовой продукции. При ценах факторов производства $(w_1, r_1) = (16, 4)$ фирма использовала комбинацию факторов $(L_1; K_1) = (2; 8)$.

Затем обнаружилось, что изменилась конъюнктура обоих рынков факторов производства. Новые цены: $(w_2, r_2) = (8, 8)$. В этих условиях фирма приняла решение применить комбинацию факторов $(L_2; K_2) = (4; 4)$, позволяющую сохранить выпуск на прежнем уровне.

(*а*) Являются ли действия фирмы рациональными?

(*б*) Стремясь снизить издержки в новых ценовых условиях, руководство фирмы пригласило для консультаций «эффективного менеджера», который порекомендовал использовать больше дешевого труда и экономить на дорогом капитале.

Рекомендованная им комбинация факторов – $(\widetilde{L_2}; \widetilde{K_2}) = (5; 3{,}2)$. Удастся ли фирме минимизировать издержки, следуя советам наемного консультанта?

Подсказки

(1) Применяемые фирмой технологии описываются производственной функцией Кобба – Дугласа.

(2) Для ответов на вопросы целесообразно использовать принцип выявленности по отношению к издержкам.

Решения и ответы

(a) Для оценки рациональности действий фирмы проверим выполнение слабой аксиомы минимизации издержек (*WACM*).

Слабая аксиома минимизации издержек представлена совокупностью двух неравенств (4.31). Проверим ее выполнение:

$$\begin{cases} w_1L_1 + r_1K_1 \le w_1L_2 + r_1K_2, \\ w_2L_2 + r_2K_2 \le w_2L_1 + r_2K_1. \end{cases}$$

Подставив соответствующие значения в систему неравенств, получим:

$$\begin{cases} 16 \cdot 2 + 4 \cdot 8 \le 16 \cdot 4 + 4 \cdot 4; \\ 8 \cdot 4 + 8 \cdot 4 \le 8 \cdot 2 + 8 \cdot 8. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 64 < 80, \\ 64 < 80. \end{cases}$$

Видим, что *WACM* выполняется. Следовательно действия фирмы рациональны и согласуются с принципом минимизации издержек.

($б$) Для того чтобы оценить эффективность полученных рекомендаций, рассчитаем величину общих и средних издержек для обеих комбинаций факторов в новых ценовых условиях:

$$TC(4(w_2, r_2, L_2, K_2)) = 8 \cdot 4 + 8 \cdot 4 = 64 \Rightarrow AC(4) = \frac{64}{4} = 16;$$

$$TC(4(w_2, r_2, \widetilde{L_2}, \widetilde{K_2})) = 8 \cdot 5 + 8 \cdot 3{,}2 = 65{,}6 \Rightarrow AC(4) = \frac{65{,}6}{4} = 16{,}4.$$

Несложно заметить, что комбинация факторов от «эффективного менеджера» хуже: и общие, и средние издержки для выпуска 4 единиц продукта оказались выше.

5. МАКСИМИЗАЦИЯ ПРИБЫЛИ И ФУНКЦИЯ ПРЕДЛОЖЕНИЯ КОНКУРЕНТНОЙ ФИРМЫ

В предыдущих главах многократно отмечалось, что генеральной целью деятельности фирмы является максимизация ее общей прибыли. Общая прибыль – функция объема выпуска. Следовательно варьируемым параметром выступает объем: фирма стремится выбрать такой выпуск, при котором ее общая прибыль максимальна. При этом уже решена проблема выбора оптимальных (минимизирующих издержки) комбинаций факторов производства для любого уровня выпуска, q[22].

Модель фирмы – это модель (задача) выбора оптимального объема выпуска. Оптимальным будет такой объем выпуска, который обеспечивает фирме достижение цели – максимум прибыли. В самом общем виде модель фирмы может быть представлена системой

$$\begin{cases} \max T\pi(q), \\ T\pi(q) = TR(q) - TC(q) \geq 0, \\ q \geq 0. \end{cases} \qquad (5.1)$$

Ограничение в модели (5.1) позволяет определить интервал экономической безубыточности. Согласно экономическому подходу к определению общих издержек интервал экономической безубыточности не совпадает с интервалом безубыточности в рамках бухгалтерского подхода, поскольку экономические издержки для любого объема выпуска больше бухгалтерских; размер экономической прибыли – меньше размера бухгалтерской прибыли; интервал экономической безубыточности – у́же интервала бухгалтерской

[22] В рамках главы 5 будут обсуждаться рыночные, по сути, решения фирмы. Для того чтобы различать объем выпуска фирмы и рыночный объем, в данной главе используются следующие обозначения: q – для объема отдельной фирмы; Q – для рыночного объема.

безубыточности. Объемы выпуска, обеспечивающие выполнение условия $T\pi(q) = 0$, называются точками (экономической) безубыточности.

Для достижения функцией экстремума должно выполняться условие первого порядка (*the first order condition – FOC*): первая производная функции должна быть равна нулю:

$$\frac{\partial T\pi(\cdot)}{\partial q} = \frac{\partial TR(\cdot)}{\partial q} - \frac{\partial TC(\cdot)}{\partial q} = MR(q^0) - MC(q^0) = 0. \qquad (5.2)$$

Из *FOC* следует, что функция общей прибыли достигает максимума при выполнении условия

$$MR(q^0) = MC(q^0). \qquad (5.3)$$

Условие (5.3) – *необходимое условие максимизации прибыли*.

Выполнение *FOC* гарантирует достижение целевой функцией экстремума. Однако предельные издержки фирмы могут иметь *U*-образную форму. Тогда экстремумом может быть как минимум, так и максимум функции прибыли. При выборе оптимального объема в этом случае необходимо рассматривать выполнение условия второго порядка (*the second order condition – SOC*), позволяющего разграничить локальные минимум и максимум целевой функции, – вторая производная функции прибыли для достижению ею максимума должна быть отрицательна:

$$\frac{\partial^2 T\pi(\cdot)}{\partial q^2} = \frac{\partial^2 TR(\cdot)}{\partial q^2} - \frac{\partial^2 TC(\cdot)}{\partial q^2} = \frac{\partial MR(\cdot)}{\partial q} - \frac{\partial MC(\cdot)}{\partial q} < 0. \qquad (5.4)$$

Из *SOC* следует, что функция общей прибыли достигает максимума при выполнении условия

$$MR(q^0) < MC(q^0). \qquad (5.5)$$

Условие (5.5) – *достаточное условие максимизации прибыли*.

Задача фирмы формулируется и решается по-разному в зависимости от того, является ли фирма ценополучателем или имеет власть над ценой на рынке выпускаемого фирмой продукта. Совершенно конкурентная фирма выступает ценополучателем (не имеет рыночной власти) на любом рынке, в том числе – и на рынке выпускаемого продукта; при сложившейся на рынке продукта цене (p) ее предельный доход: $MR = p = \text{const}$, изменение предельного дохода: $\frac{\partial MR(\cdot)}{\partial q} = 0$.

Следовательно необходимое условие максимизации общей прибыли (условие первого порядка) для конкурентной фирмы таково, что при оптимальном выпуске предельные издержки фирмы равны рыночной цене продукта:

$$MC(q^0) = p. \tag{5.6}$$

Достаточное условие максимизации общей прибыли (условие второго порядка) для конкурентной фирмы выглядит так: при оптимальном выпуске предельные издержки фирмы возрастают, или:

$$\frac{\partial MC(\cdot)}{\partial q} > 0. \tag{5.7}$$

Формулировка модели фирмы также зависит от продолжительности временнóго интервала, в рамках которого осуществляется выбор оптимального выпуска. Отличия касаются как категориального аппарата, так и результатов анализа – и прямых, и косвенных.

Далее последовательно рассмотрим проблему максимизации прибыли для конкурентной фирмы в рамках короткого и длительного периодов. В процессе анализа будут показаны особенности принятия краткосрочных и долгосрочных решений о максимизирующем общую прибыль объеме выпуска; представлены функции спроса на переменные факторы производства и выявлены параметры, их определяющие.

5.1. Максимизация прибыли в коротком периоде

5.1.1. Выбор фирмой оптимального объема выпуска

В коротком периоде фирма, осуществляя выпуск, использует как переменные, так и постоянные факторы производства. Соответственно фирма несет как переменные, так и постоянные издержки. Тогда краткосрочная функция общей прибыли имеет следующий вид:

$$T\pi(q) = TR(q) - TC(q) = TR(q) - FC - VC(q). \qquad (5.8)$$

Краткосрочная экономическая прибыль может быть отрицательной, нулевой и положительной.

Покажем величину краткосрочной общей прибыли как разницу между общим доходом и общими издержками конкурентной фирмы с учетом структуры общих издержек (рис. 5.1).

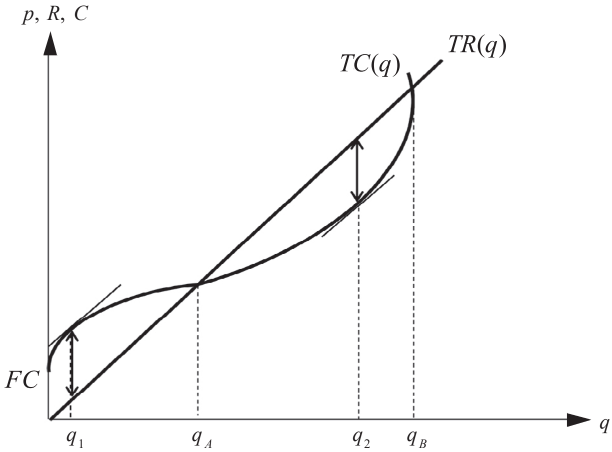

Рис. 5.1. Общая прибыль конкурентной фирмы как разница между общим доходом и общими издержками

Величина общей прибыли отмечена на рис. 5.1 двусторонними стрелками: при выпуске q_1 экономическая прибыль отрицательна; при выпуске q_2 – положительна; экономическая безубыточность достигается при выпусках q_A и q_B.

Общая прибыль фирмы отрицательна при выпусках $q < q_A$ и $q > q_B$; неотрицательна в интервале выпуска $q_A \le q \le q_B$. Этот интервал упомянут выше как интервал (экономической) безубыточности. Соответственно q_A и q_B – точки (экономической) безубыточности.

Функция общей (экономической) прибыли фирмы – $T\pi(q)$ представлена на рис. 5.2 (объемы выпуска, при которых общая прибыль отрицательна и минимальна, равна нулю и достигает максимума, обозначены так же, как на рис. 5.1).

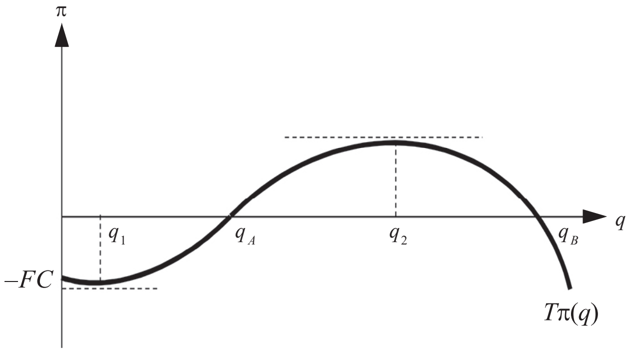

Рис. 5.2. Общая прибыль конкурентной фирмы

Поскольку в коротком периоде фирма не может изменить запас постоянных факторов ни в бóльшую, ни в меньшую сторону, издержки по содержанию постоянных факторов (*FC*) фирма рассматривает как невозвратные (*sunk costs*) и принимает решения о выпуске без их учета. Имеется в виду следующее: при нулевом выпуске фирма сталкивается с убытками, величина которых равна постоянным издержкам: $T\pi(0) = -FC$. Следовательно если выпуск фирмы положителен, ее общая прибыль не должна быть меньше (или убытки – больше), чем при нулевом выпуске: если $q > 0$, то $T\pi(q) \geq -FC$.

Тогда модель фирмы, максимизирующей общую прибыль, будет иметь такой вид:

$$\begin{cases} \max T\pi(q), \\ T\pi(q) = TR(q) - TC(q) \geq -FC, \\ q \geq 0. \end{cases} \tag{5.9}$$

Поскольку в коротком периоде $TC(q) = FC + VC(q)$, величина $-FC$ присутствует и в левой, и в правой части ограничения модели (5.9). Тогда ограничение можно преобразовать:

$$TR(q) - VC(q) \geq 0. \tag{5.10}$$

Ограничение в задаче в виде неравенства (5.10), по сути, ограничение на величину операционной прибыли (*operational profit* – $O\pi$), т. е. прибыли от осуществления производственных операций. Понятие «операционная прибыль» не получило в экономической литературе распространения. Обычно разницу между выручкой от реализации и переменными издержками называют выигрышем продавца[23] (*producer's surplus* – *PS*). Выигрыш продавца, как правило, рассматривают, характеризуя поведение фирмы на рынке производимого и продаваемого ею блага. По мнению автора, для анализа проблемы выбора оптимального объема более оправдано использование термина «операционная прибыль».

Функции общей и операционной прибыли фирмы, а также интервалы экономической и операционной безубыточности представлены на рис. 5.3. На нем легко увидеть, что интервал операционной безубыточности фирмы $(\widetilde{q_A} \leq q \leq \widetilde{q_B})$ шире интервала экономической безубыточности $(q_A \leq q \leq q_B)$.

Максимизируя общую прибыль в коротком периоде, фирма фактически максимизирует операционную прибыль. Уточним формулировку модели фирмы (5.9) с учетом сделанного замечания:

$$\begin{cases} \max O\pi(q), \\ O\pi(q) = TR(q) - VC(q) \geq 0, \\ q \geq 0. \end{cases} \tag{5.11}$$

[23] Прямой перевод англоязычного термина *producer's surplus* – выигрыш производителя. С учетом того, что производитель на рынках благ выступает в качестве продавца, среди экономистов этот термин понимается как выигрыш продавца.

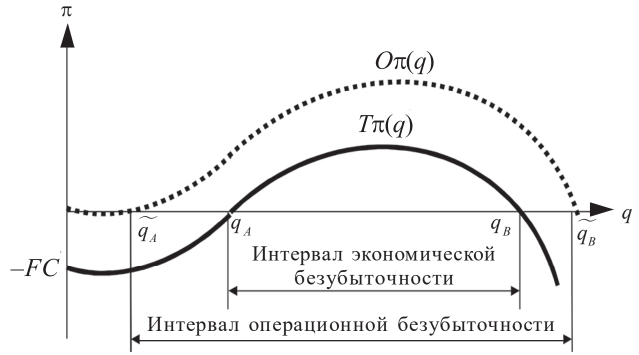

Рис. 5.3. Общая и операционная прибыль конкурентной фирмы

Решив задачи (5.9) и (5.11), получим результат, представленный условиями (5.6) и (5.7). Он одинаков и при максимизации $T\pi(q)$, и при максимизации $O\pi(q)$[24].

Графический анализ необходимого и достаточного условий максимизации прибыли (как общей, так и операционной), т. е. анализ модели фирмы в терминах предельных величин представлен на рис. 5.4.

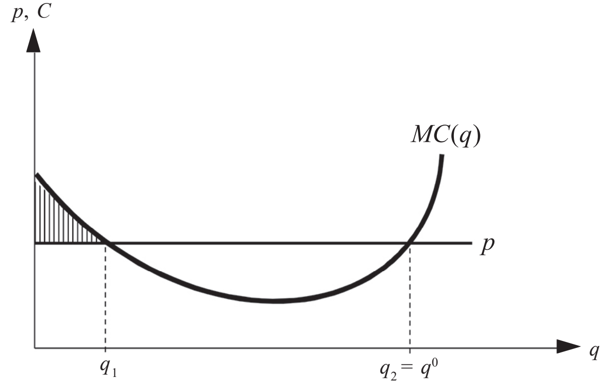

Рис. 5.4. Необходимое и достаточное условия максимизации общей прибыли конкурентной фирмы

[24] Объяснение – предельно простое: линия $O\pi(q)$ получена посредством сдвига линии $T\pi(q)$ параллельно вверх на величину FC, поэтому максимума и $O\pi(q)$, и $T\pi(q)$ достигают при одном и том же выпуске.

Условие первого порядка (5.6) выполняется при объемах выпуска q_1 и q_2. Математически указанные объемы обеспечивают локальные экстремумы функции общей прибыли. Однако при выпуске q_1 фирма сталкивается с операционными убытками: $O\pi(q_1) < 0$, величина которых показана заштрихованной областью (см. рис. 5.4). При этом экономическая прибыль тоже отрицательна и составляет величину $T\pi(q_1) = O\pi(q_1) - FC < 0$. Иначе говоря, при q_1 не выполняется условие второго порядка. При объеме выпуска q_2 выполняется и условие первого порядка, и условие второго порядка. Следовательно оптимальный выпуск фирмы – $q^0 = q_2$. Необходимо отметить, что при оптимальном выпуске положительна и операционная, и общая (экономическая) прибыль.

5.1.2. Спрос на переменный фактор в коротком периоде

Сохраним предположение, что фирма применяет только два фактора производства – труд и капитал. Тогда из анализа модели фирмы можно получить важные выводы относительно динамики краткосрочного спроса на переменный фактор производства.

Запас капитала у фирмы фиксирован и составляет $\overline{K}$. Тогда функция общей прибыли может быть представлена в виде

$$T\pi\left(q\left(L, \overline{K}\right)\right) = TR\left(q\left(L, \overline{K}\right)\right) - r\overline{K} - wL. \qquad (5.12)$$

Следовательно функция операционной прибыли такова:

$$O\pi\left(q\left(L, \overline{K}\right)\right) = TR\left(q\left(L, \overline{K}\right)\right) - wL. \qquad (5.13)$$

В задачах, описанных в (5.9) и (5.11) с уточненным видом целевых функций [равенства (5.12) и (5.13)], единственным варьируемым параметром выступает объем использования труда. Максимизируем функцию общей прибыли и функцию операционной прибыли по затратам труда (L) и получаем:

$$\frac{\partial T\pi(\cdot)}{\partial L} = \frac{\partial O\pi(\cdot)}{\partial L} = p \cdot \frac{\partial q(\cdot)}{\partial L} - w = 0. \qquad (5.14)$$

Поскольку $\dfrac{\partial q(\cdot)}{\partial L} = MP_L(\cdot)$, балансовое уравнение (5.14) можно записать в виде

$$p \cdot MP_L(L^0) = w. \tag{5.15}$$

Левая часть балансового уравнения (5.15) представляет собой стоимость предельного продукта (*value of marginal product – VMP*) для оптимального объема труда (L^0) – предельную выгоду от использования труда; правая часть – затраты на дополнительную единицу труда, определяемые ценой труда (ставкой заработной платы). То есть данное балансовое уравнение – частный случай условия равновесия агента-оптимизатора: предельная выгода должна быть равна предельным затратам. Выпишем балансовое уравнение (5.15) как равенство предельной выгоды от использования труда и предельных затрат по его привлечению:

$$VMP_L(L^0) = w. \tag{5.16}$$

Из балансового уравнения (5.16) можно получить краткосрочную функцию спроса на труд со стороны отдельной фирмы. Для этого необходимо преобразовать балансовое уравнение (5.15), представив обе его части в реальных показателях. Разделим левую и правую части уравнения (5.15) на цену выпускаемого продукта. Получим балансовое уравнение (5.17), левая часть которого демонстрирует реальную предельную выгоду от использования труда: $MP_L(L)$; правая часть – это реальные предельные затраты на привлечение труда, измеряемые с помощью показателя «реальная заработная плата» $\left(\dfrac{w}{p}\right)$:

$$MP_L(L^0) = \frac{w}{p}. \tag{5.17}$$

Преобразуем левую часть балансового уравнения (5.17), представив L как функцию, обратную MP_L, и получим функцию спроса на труд со стороны конкурентной фирмы в рамках короткого периода:

$$D_L\left(\frac{w}{p}\right) = MP_L^{-1}. \tag{5.18}$$

Графический анализ краткосрочной функции спроса на труд проведем, основываясь на динамике предельного дохода труда (см. рис. 1.3 и 3.2) с учетом границ применения переменного фактора, представленных в подразделе 1.3 и условиями (1.7) и (1.8). По оси ординат будем фиксировать ставку реальной заработной платы. Функция спроса на труд представлена на рис. 5.5.

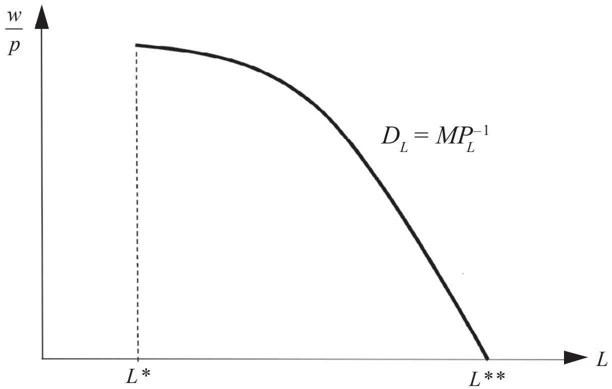

Рис. 5.5. Краткосрочный спрос на труд со стороны конкурентной фирмы

Обычно спрос рассматривается как функция рыночной цены. Для получения функции $D_L\left(\dfrac{w}{p}\right)$ необходимо воспользоваться балансовым уравнением (5.17). Функция спроса на труд определяется как обратная к функции стоимости предельного продукта труда.

Конфигурация кривой спроса на труд как функции рыночной цены труда повторяет конфигурацию кривой спроса на труд как функции реальной заработной платы. Отличие состоит в том, как определен аргумент функции.

5.1.3. Анализ модели фирмы в терминах изопрофит

Проведенный анализ показал, что краткосрочную прибыль фирма максимизирует при выполнении условия (5.16). Проведем графический анализ данного условия, воспользовавшись аппаратом изопрофитных линий (изопрофит).

И з о п р о ф и т а ($isoprofit - i\pi$) – совокупность всех сочетаний факторов производства и выпуска, обеспечивающих постоянный уровень прибыли $T\pi$^.

Выпишем уравнение для прибыли $T\pi_k = \text{const}$:

$$T\pi_k = p \cdot q - w \cdot L - r \cdot \overline{K} = p \cdot q - w \cdot L - FC. \qquad (5.19)$$

Уравнение (5.19) позволяет получить уравнение k-й изопрофиты в системе координат «затраты труда – выпуск»:

$$q(L) = \frac{T\pi_k}{p} + \frac{w}{p}L + \frac{FC}{p} = \frac{T\pi_k + FC}{p} + \frac{w}{p}L. \qquad (5.20)$$

В уравнении изопрофиты две переменные – выпуск (q) и затраты труда (L). Первое слагаемое – константа, определяющая положение изопрофитной линии: чем больше величина $T\pi_k$, тем выше лежит изопрофита. Изменение уровня $T\pi_k$ обусловливает параллельный сдвиг изопрофиты вверх или вниз.

Наклон изопрофит определяется коэффициентом перед L – величиной реальной заработной платы $\frac{w}{p}$. Общая точка изопрофиты с осью ординат имеет координаты $\left(0,\ \frac{T\pi_k + FC}{p}\right)$.

Семейство изопрофит для случая $\frac{w}{p} = \text{const} = \text{tg}\,\alpha$ представлено на рис. 5.6.

Формальный анализ уравнения изопрофиты (5.20) позволяет получить ряд важных выводов:

1) при увеличении цены переменного фактора изопрофита становится круче; следовательно уменьшается спрос на труд, а значит, кривая спроса на переменный фактор (труд) имеет отрицательный наклон;

2) изопрофита станет более крутой, если снизится цена выпускаемого продукта; это вызовет уменьшение как затрат труда, так и объема выпуска; следовательно функция объема выпуска от цены имеет положительный наклон;

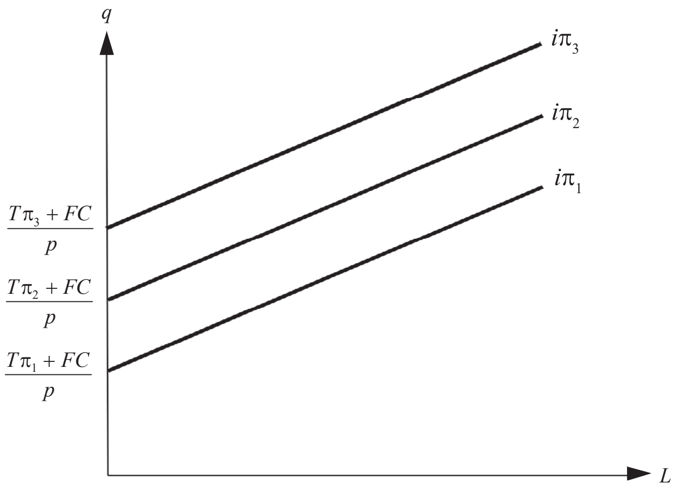

Рис. 5.6. Изопрофиты (изопрофитные линии)

3) изменение цены постоянного фактора не меняет наклон изопрофиты; следовательно фирма выберет тот же объем труда, что означает неизменность объема выпуска; при этом величина общей прибыли уменьшится.

Стремясь к максимуму общей прибыли, фирма желает попасть на самую «высокую» изопрофиту. Технологическое ограничение фирмы характеризует ее производственная функция вида $q(L)$. Решая задачу фирмы графически, в качестве оптимума получим точку, где изопрофита касается графика производственной функции с координатами $\left(\tilde{L},\ \tilde{q}\right)$. Краткосрочный оптимум фирмы представлен на рис. 5.7. Точка оптимума показывает, каков максимизирующий общую прибыль объем выпуска и одновременно – объем труда, необходимый для обеспечения указанного выпуска.

В точке оптимума наклон касательной к графику производственной функции – α. Экономический смысл $\operatorname{tg}\alpha$ – величина предельного продукта труда в точке оптимума, $MP_L(\cdot)$. Наклон изопрофиты постоянен и равен $\frac{w}{p}$.

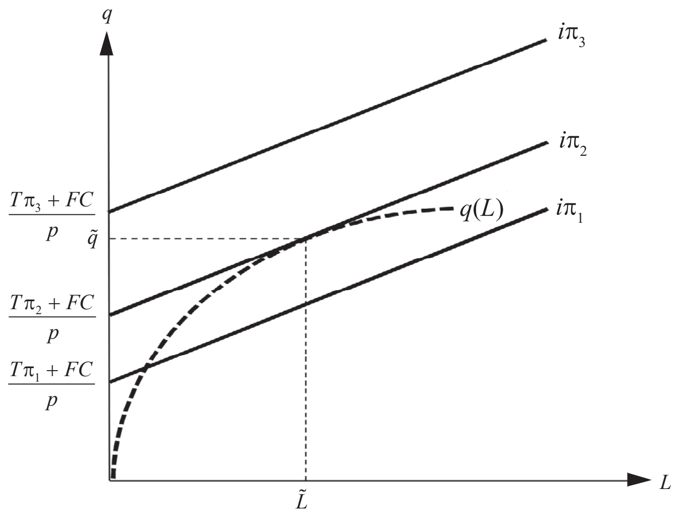

Рис. 5.7. Объем труда, максимизирующий общую прибыль в коротком периоде

Поскольку одна из изопрофит – касательная к производственной функции, получаем следующую логическую цепочку:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{w}{p} \text{ и } MP_L(\tilde{L}) = \operatorname{tg}\alpha, \text{ следовательно } MP_L(\tilde{L}) = \frac{w}{p}. \quad (5.21)$$

Балансовое уравнение (5.21), полученное посредством графического анализа выбора фирмой оптимального объема использования переменного фактора, демонстрирует тот же результат, который был получен путем формального анализа и представлен условием (5.17).

В заключение рассмотрим последствия изменений в ставке реальной заработной платы для спроса на труд со стороны фирмы. Исходный уровень реальной заработной платы (см. рис. 5.7) представлен тангенсом α: $\operatorname{tg}\alpha = \left(\frac{w}{p}\right)_1$. Изменение наклона изопрофитных линий обусловливается изменениями либо в уровне номинальной заработной платы, либо в цене выпускаемого продукта. Новый наклон изопрофит – β: $\operatorname{tg}\beta = \left(\frac{w}{p}\right)_2$. Если изопрофиты становятся более пологими, наблюдается снижение номинальной заработной платы и/или увеличение цены выпускаемого продукта. Более крутые новые изопрофитные линии имеют место в случае, когда цена продукта снижается и/или растет номинальная заработная плата.

Рассмотрим случай, когда изменение наклона изопрофит обусловлено снижением номинальной заработной платы ($w_1 > w_2$) при неизменном уровне цены выпускаемого продукта (p = const). Наклон новых изопрофит $\left(\widetilde{i\pi_k}\right)$ уменьшается. Однако общие с осью ординат точки одинаковы как для старых, так и для новых изопрофитных линий.

Обратимся к графическому методу анализа. На рис. 5.8 представлены решения фирмы относительно максимизирующего общую прибыль выпуска и необходимого для этого фактора «труд» при двух уровнях ставки (номинальной) заработной платы.

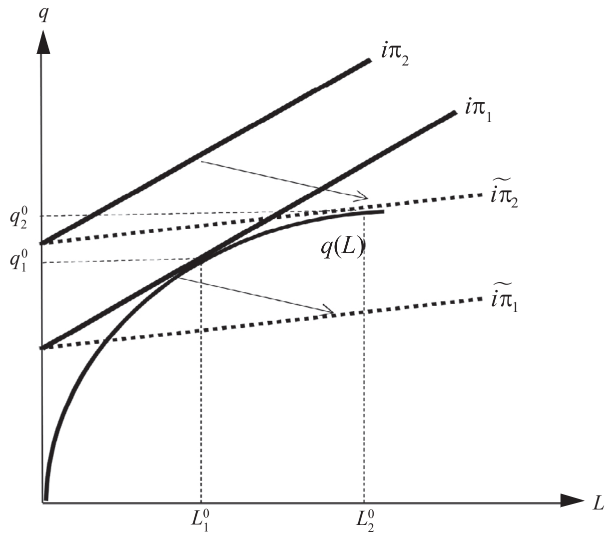

Рис. 5.8. Изменение объема спроса на труд и выпуска при снижении ставки номинальной заработной платы

Результатом снижения ставки номинальной заработной платы стало увеличение объема привлечения труда (спрос на труд со стороны фирмы увеличился). Объем выпуска также увеличился.

Кроме того, произошло увеличение прибыли: с уровня $T\pi_1$ (изопрофита $i\pi_1$) до уровня $T\pi_2$ (изопрофита $\widetilde{i\pi}_2$). Аналогичные последствия можно обнаружить и при увеличении цены выпускаемого продукта.

Итак, снижение реальной заработной платы (за счет снижения ставки номинальной заработной платы и/или за счет повышения цены продукта) обусловливает увеличение объема спроса на труд. Увеличение объема использования труда приводит к увеличению объема выпуска и к увеличению общей прибыли.

5.2. Максимизация прибыли в длительном периоде

Особенности длительного периода таковы, что фирма может не только варьировать затраты всех ресурсов, но и обеспечивать выпуск на любом уровне, применяя оптимальные комбинации факторов производства.

Иначе говоря, фирма не включает в производственный процесс ресурсы с низкой экономической эффективностью.

Решение задачи на максимум общей прибыли в длительном периоде позволяет:

1) сформулировать условие достижения фирмой оптимума при сложившейся на рынке цене продукта;

2) определить структуру оптимальных комбинаций ресурсов, таких, которые требуют для своего формирования минимальных издержек при ценах, сложившихся на соответствующих рынках;

3) описать общий алгоритм (для случая $m > 2$) построения функций условного спроса на факторы производства.

5.2.1. Условие долгосрочного оптимума конкурентной фирмы

Сформулируем задачу на максимум общей прибыли для длительного периода, в которой функция общей прибыли представлена как функция затрат факторов производства:

$$\begin{cases} \max T\pi(q(\overline{R})), \\ T\pi(q(\overline{R})) = p \cdot q(\overline{R}) - \sum_{j=1}^{m} w_j \cdot R_j \geq 0, \\ R_j > 0, \forall\ j = \overline{1, m}. \end{cases} \tag{5.22}$$

Для решения задачи (5.22) воспользуемся условиями первого порядка, взяв частные производные по всем аргументам целевой функции. Получим систему из m уравнений вида

$$\begin{cases} p \cdot \dfrac{\partial q(\cdot)}{\partial R_j} - w_j = 0, \\ R_j > 0, \forall\ j = \overline{1, m}. \end{cases} \tag{5.23}$$

Важнейшим результатом анализа системы уравнений (5.23) является условие оптимума фирмы, максимизирующей общую прибыль. Помним, что $\dfrac{\partial q(\cdot)}{\partial R_j} = MP_j(\cdot)$. Преобразовав каждое из m уравнений системы (5.23), получаем:

$$\frac{w_1}{MP_1\left(\overline{R^0}\right)} = \frac{w_2}{MP_2\left(\overline{R^0}\right)} = \ldots = \frac{w_m}{MP_m\left(\overline{R^0}\right)} = p. \tag{5.24}$$

Здесь целесообразно вспомнить условие оптимальности для задачи на минимум издержек (4.7), согласно которому $\dfrac{w_j}{MP_j\left(\overline{R^0}\right)} = \eta^0$ для всех применяемых факторов. Экономический смысл η_0 – величина предельных издержек при нахождении фирмы в оптимуме.

Тогда из равенств (4.7) и (5.24) следует вывод: в оптимуме

$$MC(q^0(R_1^0, R_2^0, \ldots, R_m^0)) = p. \tag{5.25}$$

Балансовое уравнение (5.25), полученное при поиске комбинации факторов производства, максимизирующей прибыль в длительном периоде, в точности совпадает с балансовым уравнением, которое было получено при поиске комбинации факторов производства, минимизирующей издержки. Таким образом, максимизировать прибыль в длительном периоде можно только одним путем – сформировав комбинацию ресурсов, минимизирующую издержки для любого объема выпуска.

5.2.2. Структура оптимальных комбинаций факторов производства и долгосрочное равновесие фирмы

Уравнения, представленные в системе (5.23), можно преобразовать с учетом того, что $p \cdot \frac{\partial q(\cdot)}{\partial R_j} = VMP_j\left(\overline{R^0}\right)$. В результате получим новую систему:

$$\begin{cases} VMP_j\left(\overline{R^0}\right) = w_j, \\ R_j > 0, \forall\ j = \overline{1, m}. \end{cases} \tag{5.26}$$

Экономический смысл уравнений в системе (5.26) таков: применяемый в оптимальном количестве ресурс должен обеспечить отдачу, равную затратам на его привлечение.

Иначе систему (5.26) можно представить в виде

$$\begin{cases} MP_j\left(\overline{R^0}\right) = \dfrac{w_j}{p}, \\ R_j > 0, \forall\ j = \overline{1, m}. \end{cases} \tag{5.27}$$

Системы уравнений (5.26) и (5.27) позволяют получить следующие результаты:

– функции спроса на все m факторов производства, используемых фирмой[25];

[25] Алгоритм выведения функций спроса на фактор производства был рассмотрен ранее, в подразделе 4.3, посвященном функциям условного спроса на факторы производства, а также в подразделе 5.1.2.

– структуру оптимальных комбинаций факторов производства длительного периода и, следовательно, траекторию расширения производства длительного периода для случая $m > 2$;

– функции, обратные функциям спроса на факторы производства.

Обратные функции спроса на факторы показывают, что цена фактора должна снизиться, чтобы фирма увеличила спрос на этот фактор.

В длительном периоде экономическая прибыль конкурентной фирмы с постоянной отдачей от масштаба равна нулю. В противном случае – при отрицательной прибыли – фирма покидает отрасль. При $T\pi > 0$ события могут развиваться так:

1) увеличение размеров фирмы приведет к монополизации отрасли, следовательно сформируются иные условия функционирования рынка и иные принципы принятия решений;

2) увеличение масштабов производства рано или поздно неизбежно приведет к убывающей отдаче от масштаба, поскольку возникнут проблемы с координацией и управлением;

3) если все фирмы будут укрупняться, это приведет к снижению рыночной цены и уменьшит экономическую прибыль до нулевого уровня.

5.3. Выявленная прибыльность

Проблема выбора объема (и комбинации факторов производства, минимизирующей издержки) легко решается в случае, когда известен вид производственной функции. Однако в реальности производственные функции не наблюдаемы. Здесь на помощь приходит принцип выявленности, который был применен в анализе проблемы минимизации издержек. В данном случае речь пойдет о выявленной прибыльности (*revealed profitability*)[26].

Решения, которые принимает фирма при известных рыночных параметрах – цене продукта и ценах факторов производства,

---

[26] См.: *Вэриан Х. Р.* Микроэкономика. Промежуточный уровень. Современный подход. С. 363–368; или: *Varian H. R.* Intermediate Microeconomics. A Modern Approach. P. 325–329.

наблюдать можно. Исходя из предположения о рациональности фирмы как рыночного агента будем считать, что эти решения – самые эффективные из имеющихся вариантов действий. То есть максимизирующая общую прибыль фирма демонстрирует, что выбранные объемы факторов производства и выпуска представляют собой выполнимую производственную программу, и выбранные комбинации более прибыльны, чем другие доступные варианты выбора.

Для простоты будем полагать, что фирма использует два фактора производства – труд и капитал; имеет некую производственную функцию, описывающую возможные технологии выпуска, и эта функция неизменна. Тогда при ценах продукта и факторов производства (p_1, w_1, r_1) фирма принимает решение (q_1, L_1, K_1). В случае, когда условия принятия решения изменились (p_2, w_2, r_2), фирма выбирает иное сочетание выпуска и объемов использования факторов производства, а именно (q_2, L_2, K_2).

Тогда должны выполняться соотношения

$$\begin{cases} p_1q_1 - w_1L_1 - r_1K_1 \geq p_1q_2 - w_1L_2 - r_1K_2, \\ p_2q_2 - w_2L_2 - r_2K_2 \geq p_2q_1 - w_2L_1 - r_2K_1. \end{cases} \tag{5.28}$$

Выполнение условий (5.28) – аксиома рационального поведения для агента, максимизирующего общую прибыль. Она имеет устоявшееся название – слабая аксиома максимизации прибыли (*weak axiom of profit maximization – WAPM*).

Преобразуем систему (5.28) в одно общее неравенство, перенеся правые части обоих неравенств влево, а затем сложив полученные неравенства:

$$\begin{gathered}[p_1q_1 - w_1L_1 - r_1K_1] + [p_2q_2 - w_2L_2 - r_2K_2] - \\ - [p_1q_2 - w_1L_2 - r_1K_2] - [p_2q_1 - w_2L_1 - r_2K_1] \geq 0. \end{gathered} \tag{5.29}$$

Неравенство (5.29) преобразуем еще раз, объединив связанные элементы. Получим:

$$\begin{gathered}(p_2 - p_1) \cdot (q_2 - q_1) - (w_2 - w_1) \cdot (L_2 - L_1) - \\ - (r_2 - r_1) \cdot (K_2 - K_1) \geq 0. \end{gathered} \tag{5.30}$$

Теперь неравенство (5.30) представим в виде ограничения на изменения в рыночных параметрах и изменениях относительно объема выпуска и объемов привлечения факторов производства:

$$\Delta p \cdot \Delta q - \Delta w \cdot \Delta L - \Delta r \cdot \Delta K \geq 0. \tag{5.31}$$

Неравенство (5.31) приводит к ряду важных выводов, ранее полученных из формального анализа:

1) если цены факторов производства неизменны, а цена выпускаемого продукта изменяется, то объем выпуска либо изменяется в том же направлении, либо остается неизменным[27]. Из этого следует, что кривая предложения фирмы имеет неотрицательный наклон;

2) если цена продукта и цена одного из факторов (например, капитала) не меняются, то цена труда и объем использования труда меняются в разных направлениях[28]. То есть функция спроса на фактор производства (в данном случае – на фактор «труд») должна быть невозрастающей функцией цены этого фактора. Иначе говоря, кривая спроса на фактор производства имеет неположительный наклон.

Формальный анализ, безусловно, более удобен и дает больше результатов. Существует ли возможность, основываясь на принципе выявленной прибыльности, получить представление о применяемых фирмой технологиях и виде производственной функции? Ответ будет положительным. Используем аппарат изопрофитных линий, представленный в подразделе 5.1.3.

Будем полагать, что фирма имеет запас капитала на уровне $\overline{K} = \text{const}$. При наличном запасе капитала и неизменной ставке арендной платы за единицу капитала величина постоянных издержек фирмы составит: $FC = r \cdot \overline{K}$. Расходы на привлечение труда – $w \cdot L(q)$. Тогда уравнение изопрофитных линий для разных уровней цены продукта будет иметь вид

$$q_k = \frac{T\pi_k + FC}{p_k} + \frac{w}{p_k} L_k. \tag{5.32}$$

[27] Например, если $\Delta p > 0$, то из неравенства $\Delta p \cdot \Delta q \geq 0$ следует, что $\Delta q \geq 0$.

[28] Если, например, $\Delta w > 0$, то из неравенства $-\Delta w \cdot \Delta L \geq 0$ (или, иначе, $\Delta w \cdot \Delta L \leq 0$) следует, что $\Delta L \leq 0$.

Наклон изопрофит определяется соотношением $\frac{w}{p_k}$. Изопрофитная линия становится более пологой при увеличении цены выпускаемого продукта и более крутой – при снижении цены. Расположение изопрофит относительно начала координат определяется уровнем прибыли и ценой продукта: $\frac{T\pi_k + FC}{p_k}$.

Последовательно совершим наблюдения за решениями фирмы при нескольких уровнях цены выпускаемого продукта и прочих равных условиях. Исходим из полной рациональности фирмы как экономического агента. Информация о ценах, объеме выпуска и объеме привлечения труда доступна. Фирма знает, какую прибыль она извлекает при любом уровне выпуска.

Отобразим на графике принимаемые фирмой решения вида (L_k, q_k) для трех уровней цены продукта: $p_3 > p_2 > p_1$ (рис. 5.9).

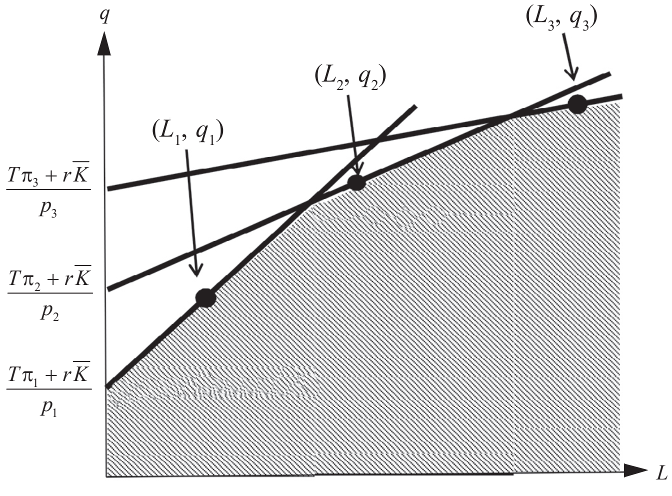

Рис. 5.9. Реконструкция технологического ограничения на основе слабой аксиомы максимизации прибыли (*WAPM*)

При цене p_1 фирма принимает решение (L_1, q_1); при цене p_2 – (L_2, q_2); при цене p_3 – (L_3, q_3). Все указанные решения фирмы представлены точками в системе координат «затраты труда – объем выпуска» (см. рис. 5.9). Каждая точка принадлежит соответствующей изопрофитной линии. К производственному множеству данной фирмы относятся все точки, расположенные в заштрихованной области, лежащей ниже изопрофит. Именно в ней находятся сочетания объема труда и объема выпуска, удовлетворяющие требованиям к производственному множеству (обладающему свойствами монотонности и выпуклости). Эти требования обсуждались ранее, в подразделе 1.2. Таким образом осуществляется реконструкция производственного множества.

Когда наблюдаемые варианты выбора фирмы удовлетворяют *WAPM*, можно оценить технологию, обусловливающую наилучшие (максимизирующие общую прибыль) варианты выбора. Чем больше наблюдений, тем точнее оценка технологии. Полученная оценка технологии может быть использована для прогнозирования поведения фирмы как на рынке продукта, так и на рынках факторов производства.

5.4. Предложение конкурентной фирмы

Проблемы максимизации прибыли и минимизации издержек, как показал проведенный анализ, тесно взаимосвязаны[29]. Конкурентная фирма выбирает объем выпуска, обеспечивающий выполнение необходимого и достаточного условий максимизации общей прибыли. Отвечающий этим условиям выпуск дает максимально возможную (при действующих технологическом и рыночных ограничениях) общую прибыль: $T\pi(q^0) = \max T\pi(q)$. Решение о выпуске меняется всякий раз, когда изменяется конъюнктура рынка выпускаемого продукта, – фирма реагирует на рыночную цену продукта. О функции реакции фирмы-ценополучателя и пойдет речь в данном подразделе.

[29] Если фирма максимизирует прибыль и производит выпуск q, то она должна при этом применять минимизирующую издержки комбинацию факторов производства. В противном случае обнаружится более дешевый способ обеспечить выпуск на уровне q.

Выбор фирмой оптимального выпуска определяется ценой выпускаемого продукта, поскольку $TR(q) = p \cdot q$. Реагируя на цену продукта, фирма принимает решение об объеме выпуска и продаж, т. е. решение об объеме предложения продукта на рынке. По сути, речь будет идти об анализе ограничения со стороны рынка выпускаемого продукта.

Таким образом, функция индивидуального предложения (*supply* – *S*) есть функция реакции конкурентной фирмы на рыночную цену, или функция рыночной цены. Под индивидуальным предложением также понимается количество блага (продукта потребительского назначения) определенного вида, которое при данном уровне цены блага и прочих равных условиях готова реализовать конкретная фирма.

Прежде чем перейти к анализу предложения конкурентной фирмы, рассмотрим динамику спроса на ее продукцию. Будучи ценополучателем, фирма готова продать столько, сколько она в состоянии выпустить, с учетом того, сколько у нее готовы купить.

На рис. 5.10 показаны рыночный спрос (*D*), спрос на продукцию *i*-й конкурентной фирмы (d_i) и максимальные возможности выпуска фирмы (q^{**}) при сложившейся на рынке цене продукта p_1. Спрос на продукцию конкурентной фирмы – d_i – линия, состоящая из вертикального и горизонтального участков и участка с отрицательным наклоном, фрагментарно совпадающего с линией рыночного спроса. Спрос на продукцию отдельной конкурентной фирмы:

– абсолютно эластичен при цене, сложившейся на рынке;

– равен нулю и абсолютно неэластичен при цене, превышающей рыночную;

– совпадает с функцией рыночного спроса при цене, ниже сложившейся на рынке.

Динамика предложения конкурентной фирмы зависит от продолжительности временно́го интервала, в рамках которого действует фирма. При этом следует помнить о том, что в коротком периоде возможности расширения производства ограничены запасом капитала. Следовательно как бы не хотелось фирме увеличивать объем выпуска и продаж, максимальный объем предложения фирмы

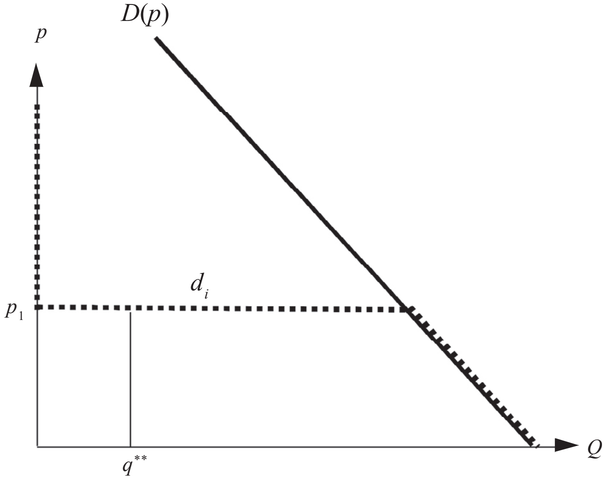

Рис. 5.10. Спрос на продукцию конкурентной фирмы

ограничивается максимально возможным в коротком периоде выпуском: $q^{**} = F(L^{**}, \overline{K})$. В длительном периоде фирма может расширять производство без ограничений.

5.4.1. Краткосрочная функция предложения фирмы

Последовательно рассмотрим реакцию фирмы на разные по уровню цены, которые могут сложиться на конкурентном рынке. Выделим пять уровней цены, обусловливающих различного рода финансовые последствия для фирмы и вызывающих разную реакцию ценополучателя посредством выбора решения об объеме выпуска:

1) интервал цен, превышающих минимальные средние издержки фирмы [$p_1 > \min AC(q)$];

2) единственно возможная цена, такая, что $p_2 = \min AC(q)$;

3) интервал цен, которые выше минимальных средних переменных издержек фирмы, но ниже минимальных средних издержек [$\min AVC(q) < p_3 < \min AC(q)$];

4) единственно возможная цена, такая, что $p_4 = \min AVC(q)$;

5) интервал цен, которые ниже минимальных средних переменных издержек [$0 < p_5 < \min AVC\ (q)$].

Величина общей (экономической) прибыли[30], которую получает фирма при любом уровне цены, определяется по единой схеме в соответствии с формулой

$$T\pi(q_i^0) = p_i \cdot q_i^0 - TC(q_i^0) = q_i^0 \cdot [p_i - AC(q_i^0)]. \qquad (5.33)$$

Если на рынке устанавливается цена, превышающая минимальные средние издержки фирмы, выбирается объем q_1^0, обеспечивающий фирме положительную экономическую прибыль, поскольку $p_i - AC(q_i^0) > 0$. Критерий выбора объема – необходимое условие максимизации прибыли: $MC(q_1^0) = p_1$. Положение такой фирмы отражено на рис. 5.11. Фирма, находящаяся в данном положении, называется *допредельной фирмой со сверхприбылью*[31].

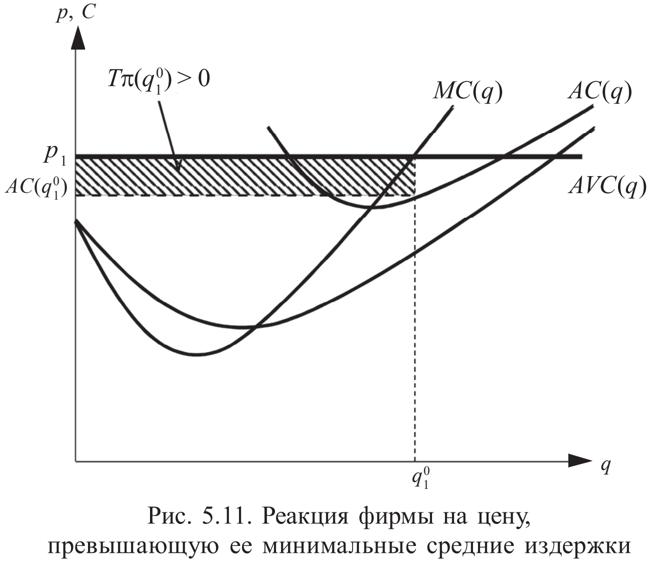

Рис. 5.11. Реакция фирмы на цену, превышающую ее минимальные средние издержки

---

[30] В формуле (5.33) и далее в данном подразделе индекс *i* обозначает *i*-й уровень цены и соответствующий ему оптимальный объем выпуска.

[31] Под сверхприбылью понимается положительная экономическая прибыль, т. е. такая, которая превышает нормальную прибыль (вознаграждение предпринимательскому фактору, включаемое – в рамках экономического подхода – в общие издержки).

Установление на рынке цены, равной минимальным средним издержкам фирмы, цены p_2, заставляет фирму выбрать объем q_2^0, обеспечивающий нулевую экономическую прибыль, поскольку $p_2 = AC(q_2^0)$. Критерий выбора объема – прежний: $MC(q_2^0) = p_2$. Положение такой фирмы отражено на рис. 5.12. Фирма, находящаяся в данном положении, называется *допредельной фирмой с нормальной прибылью*[32].

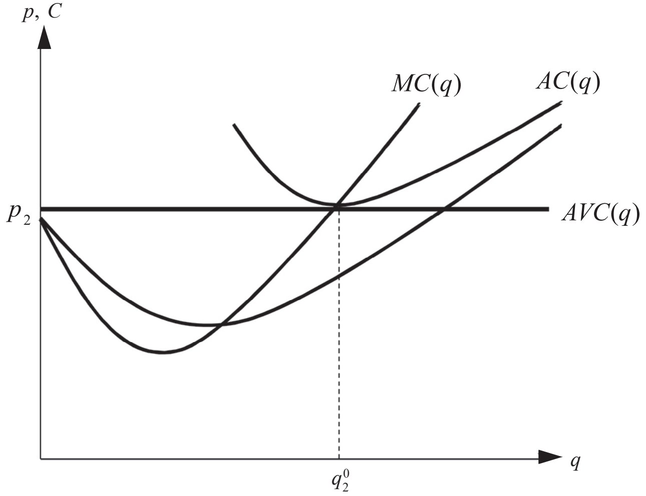

Рис. 5.12. Реакция фирмы на цену, равную ее минимальным средним издержкам

Дальнейшее снижение рыночной цены до уровня p_3 обусловливает возникновение убытков (отрицательной общей прибыли). Является ли в таких условиях целесообразным ведение операционной деятельности, или положительный выпуск? Чтобы ответить на данный вопрос, необходимо сравнить общую прибыль при нулевом

[32] Под нормальной прибылью понимается нулевая экономическая прибыль. Положение фирмы таково, что при сложившейся цене фирма получает выручку от реализации, позволяющую обеспечить вознаграждение всем факторам, задействованным в процессе производства. В том числе – предпринимательскому фактору, вознаграждение которому (предпринимательский доход) определяется как нормальная прибыль.

выпуске и общую прибыль при выпуске, определяемом необходимым условием максимизации прибыли: $MC(q_3^0) = p_3$.

Если фирма выбирает нулевой выпуск, она не несет иных, кроме постоянных, издержек; общий доход равен нулю, а общая прибыль

$$T\pi(0) = 0 - TC(0) = 0 - FC = -FC. \qquad (5.34)$$

Далее уточним формулу (5.33) с учетом структуры общих издержек:

$$T\pi(q_i^0) = p_i \cdot q_i^0 - FC - VC(q_i^0) = q_i^0 \cdot [p_i - AVC(q_i^0)] - FC. \quad (5.35)$$

Рассмотрим решение фирмы о положительном выпуске при цене p_3. Графическая иллюстрация представлена на рис. 5.13.

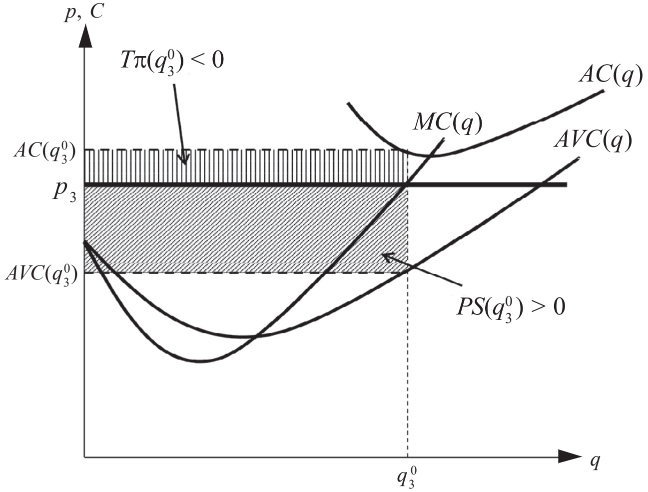

Рис. 5.13. Реакция фирмы на цену в интервале от минимума средних переменных до минимума средних издержек

Рассчитаем величину прибыли фирмы при положительном выпуске q_3^0, воспользовавшись формулой (5.35):

$$T\pi(q_3^0) = q_3^0 \cdot [p_3 - AVC(q_3^0)] - FC. \qquad (5.36)$$

Поскольку $p_3 - AVC(q_3^0) > 0$, т. е. операционная прибыль положительна, фирма имеет возможность частично покрыть затраты на содержание постоянного фактора. Следовательно хотя $T\pi(q_3^0) < 0$, при положительном выпуске величина убытков меньше, чем при нулевом выпуске:

$$|T\pi(q_3^0)| < |T\pi(0)| = FC. \tag{5.37}$$

Сравнение величин общей прибыли позволяет сделать однозначный вывод: максимизируя общую прибыль, фирма должна осуществлять выпуск на уровне q_3^0. Фирма, принимающая решение в описанных условиях, называется *допредельной фирмой*, *минимизирующей убытки*.

Рассмотрим решение фирмы о положительном выпуске при цене p_4, равной минимальным средним переменным издержкам фирмы. Графическая иллюстрация представлена на рис. 5.14.

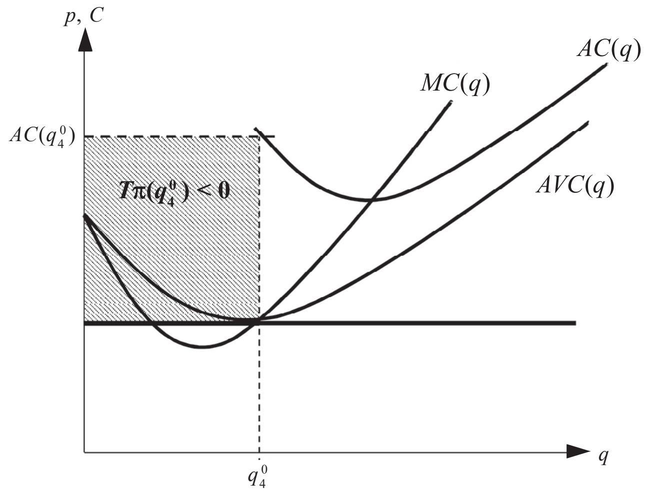

Рис. 5.14. Реакция фирмы на цену, равную минимуму средних переменных издержек

Воспользуемся формулой (5.35), на основе которой определим величину общей прибыли фирмы, выбравшей положительный объем q_4^0:

$$T\pi(q_4^0) = q_4^0 \cdot [p_4 - AVC(q_4^0)] - FC. \tag{5.38}$$

Поскольку $p_4 - AVC(q_4^0) = 0$, величина общей прибыли отрицательна и составляет $T\pi(q_4^0) = -FC < 0$. Нулевой выпуск приводит к аналогичным последствиям. Таким образом, фирме безразлично, иметь ли положительный, на уровне q_4^0, выпуск или ничего не производить.

В этом случае фирму называют *предельной*, соответственно цена на уровне минимальных средних переменных издержек также является предельной. Цена, равная минимальным средним переменным издержкам, называется минимальной ценой предложения – $p^S_{\min}$. При цене ниже указанной фирма выберет нулевой выпуск, в чем легко убедиться, рассмотрев приведенную ниже ситуацию.

Снижение рыночной цены продукта до уровня p_5, что ниже минимальных средних переменных издержек фирмы, обусловливает усугубление положения фирмы, если она выбирает положительный выпуск, опять-таки руководствуясь принципом $MC(q_5^0) = p_5$ и отслеживая выполнение достаточного условия максимизации прибыли[33]. На рис. 5.15 отображено положение фирмы, выбравшей положительный выпуск q_5^0.

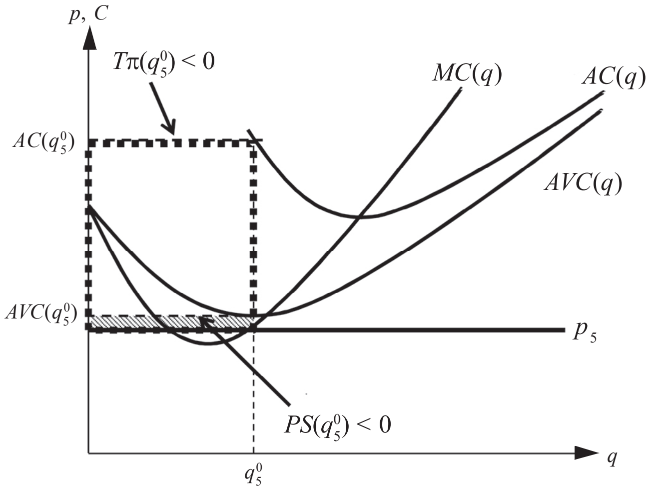

Рис. 5.15. Реакция фирмы на цену ниже минимума средних переменных издержек

---

[33] Если предельные издержки изначально возрастают, нет смысла проверять *SOC* (достаточное условие максимизации общей прибыли).

Общая прибыль фирмы, столкнувшейся на рынке с ценой типа p_5, отрицательна, так как $p_5 - AC(q_5^0) < 0$; величина прибыли может быть определена по формуле

$$T\pi(q_5^0) = q_5^0 \cdot [p_5 - AC(q_5^0)] = \\ = q_5^0 \cdot [p_5 - AVC(q_5^0)] - FC < 0. \quad (5.39)$$

Фирма не может покрыть выручкой от реализации даже переменные издержки. Поскольку $p_5 - AVC(q_5^0) < 0$, операционная прибыль данной фирмы также отрицательна. Рассматривая соотношение величин убытков при нулевом и положительном (q_5^0) выпуске, получим:

$$|T\pi(q_5^0)| = |q_5^0 \cdot [p_5 - AC(q_5^0)]| > |T\pi(0)| = FC. \quad (5.40)$$

Можно сделать однозначный вывод: максимизируя общую прибыль, при цене типа p_5 фирма должна выбрать нулевой выпуск. Фирма, находящаяся в таком положении, называется *запредельной фирмой*. Ей противопоказана производственная деятельность, если в отрасли ее присутствия цена типа p_5 отражает устойчивое равновесие. В длительном периоде фирма такого типа покинет отрасль.

На рынке фирма может столкнуться с ценой, установившейся на любом из рассмотренных уровней. Отобразим разного типа решения на одном графике (рис. 5.16). Индексы уровней цен на данном графике пронумерованы по восходящей: от низкой цены – к более высокой.

Всякий раз принимая решение о выпуске, максимизирующая общую прибыль фирма отслеживает выполнение необходимого и достаточного условий достижения оптимума. Фирма выбирает положительный объем, если сложившаяся на рынке цена – не ниже минимальных средних переменных издержек. Если рыночная цена опустится ниже указанного уровня, фирма выберет нулевой выпуск. Предложение конкурентной фирмы (см. рис. 5.16) показано прерывистой жирной линией, состоящей из двух участков – вертикального, совпадающего с осью ординат (при $p < p^S_{\min} = p_2$), и участка с положительным наклоном, совпадающего с восходящей ветвью кривой предельных издержек (при $p \geq p^S_{\min} = p_2$) начиная от точки минимума средних переменных издержек.

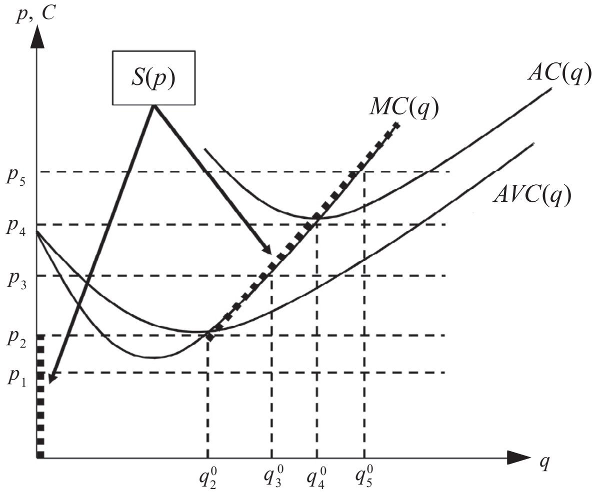

Рис. 5.16. Функция предложения конкурентной фирмы как функция реакции на цену

Точка минимума средних переменных издержек, представленная на рис. 5.16 как точка с координатами (q_2; p_2), называется **точкой прекращения операций короткого периода**[34].

Формально функция предложения конкурентной фирмы (S) имеет такой вид:

$$S(p) = \begin{cases} MC(q)^{-1}, \text{ если } p \geq p_{\min}^S, \\ 0, \text{ если } p < p_{\min}^S. \end{cases} \tag{5.41}$$

Рассмотрим также случай, когда фирма наряду с постоянными издержками имеет еще и квазипостоянные издержки. Процесс принятия решений о выпуске и алгоритм получения функции предложения не поменяются. Однако иначе станут определяться минимальная цена предложения и точка прекращения операций короткого периода.

[34] В литературе также встречается название «точка бегства фирмы из отрасли короткого периода».

В задаче на максимум прибыли такая фирма будет иметь ограничение на величину общей прибыли:

$$T\pi(q) = p \cdot q - FC - QFC - VC(q) \geq -FC. \qquad (5.42)$$

Находясь в точке прекращения операций короткого периода, фирма имеет нулевую операционную прибыль (или убытки, равные по величине полным постоянным издержкам). Следовательно должно выполняться такое условие:

$$T\pi(q^S_{\min}) =$$
$$= p^S_{\min} \cdot q^S_{\min} - FC - QFC - VC(q^S_{\min}) = -FC. \qquad (5.43)$$

Условие (5.43) применительно к операционной прибыли имеет такой вид:

$$O\pi(q^S_{\min}) = q^S_{\min} \cdot [p^S_{\min} - AVC(q^S_{\min}) - AQFC(q^S_{\min})] =$$
$$= q^S_{\min} \cdot [p^S_{\min} - AOC(q^S_{\min})] = 0. \qquad (5.44)$$

Тогда точка прекращения операций короткого периода для фирмы с квазипостоянными издержками – точка минимума средних операционных издержек, включающих средние переменные и средние квазипостоянные издержки. Функция предложения такой фирмы – линия, состоящая из двух участков: вертикального, совпадающего с осью ординат (при $p < p^S_{\min}$), и участка с положительным наклоном, совпадающего с восходящей ветвью кривой предельных издержек (при $p \geq p^S_{\min}$), начиная от точки минимума средних операционных издержек.

Рассмотрев динамику индивидуального предложения конкурентной фирмы, для завершения анализа построим функцию рыночного предложения (функцию отраслевого предложения). В конкурентной отрасли в коротком периоде количество игроков не меняется и составляет N участников. Функция предложения отдельного игрока представлена в (5.41). Рыночное предложение – суммарное предложение всех игроков, независимо от того, нулевой или положительный выпуск они выбирают. Присвоим каждому участнику индекс h.

Тогда рыночное предложение таково:

$$S(p) = \sum_{h=1}^{N} S_h(p) = \begin{cases} 0, \text{ если } p < \tilde{P}^S_{\min}, \\ > 0, \text{ если } p \geq \tilde{P}^S_{\min}, \end{cases} \tag{5.45}$$

где $\tilde{P}^S_{\min}$ – минимальная цена предложения для рынка в целом.

Такая цена определяется как наименьшая из минимальных цен предложения отдельных игроков:

$$\tilde{P}^S_{\min} = \min\left\{p^{S_1}_{\min},\ p^{S_2}_{\min},\ \ldots,\ p^{S_N}_{\min}\right\}. \tag{5.46}$$

Функция рыночного предложения показывает связь между ценой и совокупным объемом предложения всех продавцов, действующих в составе данной отрасли.

В состав конкурентной отрасли в коротком периоде входят фирмы с различной структурой издержек и, следовательно, имеющие разные объемы выпуска, разные величины прибыли. В зависимости от финансового положения в длительном периоде фирма или остается в отрасли, или покидает ее.

Если сложившаяся рыночная конъюнктура не изменится, в длительном периоде отрасль покинут запредельные и предельные фирмы, а также фирмы, минимизирующие убытки. Шанс остаться в отрасли у таких фирм – изменить динамику издержек, внедряя технологические инновации. Допредельные фирмы со сверхприбылью и имеющие нормальную прибыль останутся в отрасли. Более того, они будут стремиться расширить производство, поглощая мощности уходящих фирм или приобретая новое оборудование.

Если хотя бы у одной из укоренившихся в отрасли фирм экономическая прибыль положительна, в отрасль, где отсутствуют барьеры входа, устремятся игроки из менее благополучных отраслей или новички. Таким образом, для конкурентной отрасли характерно наличие механизмов внутриотраслевой и межотраслевой конкуренции.

5.4.2. Предложение фирмы в длительном периоде

Механизм межотраслевой конкуренции актуален только в рамках длительного периода, когда за счет притока и оттока игроков меняется численный состав производителей и продавцов на данном рынке. Действие механизма межотраслевой конкуренции представлено на рис. 5.17.

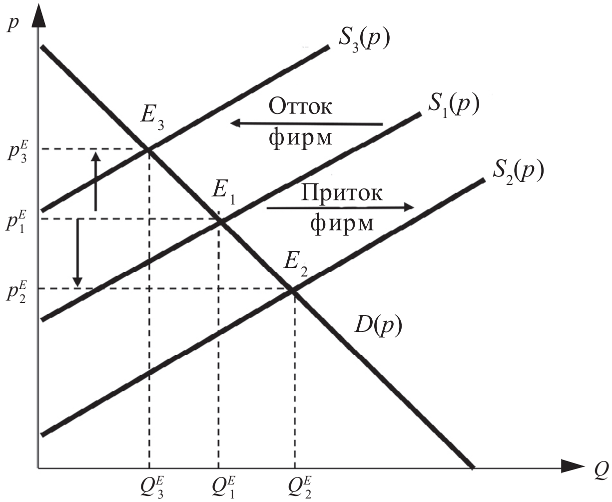

Рис. 5.17. Механизм межотраслевой конкуренции и изменение рыночной конъюнктуры в длительном периоде

На рынке последовательно и поочередно проявляются две тенденции в изменении равновесной цены: повышательная как результат оттока фирм из отрасли и понижательная как результат притока новых игроков. Действие механизма межотраслевой конкуренции прекращается при установлении долгосрочной равновесной цены, лишающей фирмы стимулов покидать отрасль или вступать в нее. Анализу долгосрочного равновесия в конкурентной отрасли и посвящен данный подраздел.

В длительном периоде у фирмы всегда есть альтернатива: прекратить деятельность и иметь нулевую экономическую прибыль (или не входить в отрасль и тоже иметь нулевую прибыль). Иначе: $T\pi(0) = 0$. Тогда можно сформулировать условие для долгосрочной равновесной цены, которая – как минимум – обеспечит фирме условия не хуже, чем при нулевом выпуске:

$$p_e^{LR} \geq \frac{TC_{LR}(q)}{q} = ACL(q). \qquad (5.47)$$

Если цена будет ниже указанной в (5.47), фирма столкнется с убытками и покинет отрасль. Фирмы-новички при такой цене не захотят вступать в отрасль. Иначе говоря, долгосрочная равновесная цена не должна приводить к возникновению убытков у укоренившихся в отрасли фирм. В то же время цена не должна приводить к появлению сверхприбыли и создавать стимулы для прихода в отрасль новых участников, а также не должны создаваться условия для перманентного укрупнения укоренившихся в отрасли игроков.

Итак, фирма находится в долгосрочном равновесии, если она при сложившейся на рынке цене:

(1) максимизирует собственную общую прибыль;

(2) получает нормальную прибыль: $T\pi(q_e^{LR}) = 0$, т. е. не имеет стимулов ни к расширению выпуска, ни к уходу из отрасли.

При какой цене будет принято решение, удовлетворяющее обоим условиям?

Долгосрочная равновесная цена, удовлетворяющая условию (1), должна стимулировать фирму выбрать такой объем выпуска (q_e^{LR}), при котором она максимизирует и краткосрочную, и долгосрочную общую прибыль:

$$MC^{ShR}(q_e^{LR}) = MCL(q_e^{LR}) = p_e^{LR}. \qquad (5.48)$$

Условие (2) предполагает, что долгосрочная равновесная цена должна быть такой, чтобы фирма не сталкивалась ни со сверхприбылью, ни с убытками:

$$p_e^{LR} = \min AC^{ShR}(q_e^{LR}) = \min ACL(q_e^{LR}). \qquad (5.49)$$

Объединив условия (5.48) и (5.49), получим интегральное условие для долгосрочной равновесной цены[35] и долгосрочного равновесия конкурентной фирмы:

$$p_e^{LR} = MC^{ShR}(q_e^{LR}) = \min AC^{ShR}(q_e^{LR}) = \\ = MCL(q_e^{LR}) = \min ACL(q_e^{LR}). \qquad (5.50)$$

[35] Необходимо также принимать во внимание, что при цене p_e^{LR} спрос и предложение на данном рынке сбалансированы: $D(p_e^{LR}) = S(p_e^{LR})$.

В соответствии со всеми требованиями к долгосрочной равновесной цене и решениям, принимаемым фирмой в рамках длительного периода, можно определить *точку прекращения операций длительного периода*. Это – точка минимума средних издержек длительного периода. Одновременно в силу того, что ACL имеет U-образную форму, минимальны и средние издержки одного из коротких периодов. Динамика издержек короткого и длительного периодов, долгосрочное равновесие и кривая долгосрочного предложения конкурентной фирмы представлены на рис. 5.18.

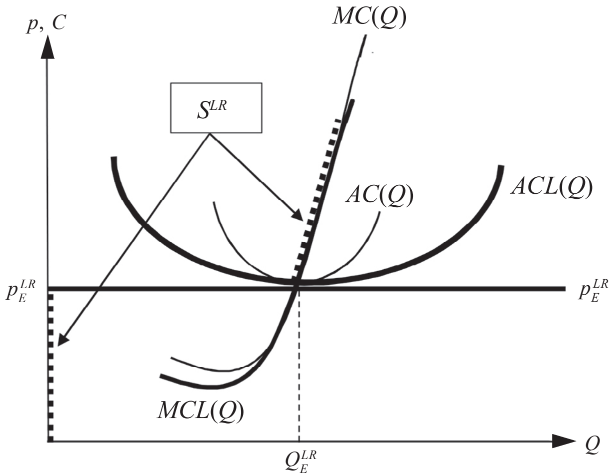

Рис. 5.18. Долгосрочное равновесие конкурентной фирмы

Выбирая оптимальный объем выпуска в рамках длительного периода, фирма отслеживает выполнение условия $MCL(q^0) = p_e^{LR}$. Следовательно функция долгосрочного предложения конкурентной фирмы является функцией, обратной функции долгосрочных предельных издержек:

$$S^{LR}(p) = \begin{cases} 0, \text{ если } p < \min ACL, \\ MCL(q)^{-1}, \text{ если } p \geq \min ACL. \end{cases} \tag{5.51}$$

Отметим также, что в длительном периоде отрасль должна включать такое количество игроков, которое предполагает неотрицательную прибыль всех участников рынка со стороны предложения. В противном случае часть фирм покинет отрасль, что приведет к росту рыночной цены, отклонению от равновесия и запуску механизма межотраслевой конкуренции.

Для рынка в целом функцию долгосрочного предложения определить нельзя в силу того, что количество продавцов варьируется (по причине свободного входа-выхода). Однако можно определить динамику рыночного предложения. Рыночное предложение может быть возрастающей или убывающей функцией цены продукта. Возможна ситуация, когда долгосрочное рыночное предложение абсолютно эластично при долгосрочной равновесной цене.

На динамику долгосрочного предложения в конкурентной отрасли влияют:

1) тип отдачи от масштаба, характерный для данной отрасли;

2) динамика долгосрочных издержек, зависящая как от типа отдачи от масштаба, так и от изменения цен применяемых факторов.

На этом анализ основных закономерностей функционирования отдельной конкурентной фирмы, максимизирующей собственную общую прибыль, завершен. Фирме, действующей в условиях неконкурентной рыночной среды, будет посвящено отдельное учебное пособие.

Типовые задания с решениями и ответами

Задание 5.1

Технология, применяемая фирмой, описывается производственной функцией Кобба – Дугласа вида $q = 16 \cdot L^{0,25}K^{0,5}$.

Фирма является ценополучателем как на рынке продукта, так и на рынках факторов производства.

Цена труда составляет 4 ден. ед., цена капитала – 32 ден. ед. Цена единицы выпускаемого продукта (p) – 3 ден. ед.

(*а*) Выпишите функцию общей прибыли фирмы.

(*б*) Определите объем выпуска, при котором величина прибыли будет максимальна.

Решения и ответы

(*a*) Функция общей прибыли данной фирмы:

$$T\pi(q) = 3q - TC(q). \quad (1)$$

Прежде всего, необходимо определить вид функции общих издержек. Для этого следует найти функции $L(q)$ и $K(q)$. С этой целью определим структуру оптимальных комбинаций труда и капитала, а затем поочередно представим производственную функцию как функцию только затрат труда и как функцию только затрат капитала. Это даст возможность получить искомые функции производственных затрат.

Согласно условию оптимальности (4.7) и соотношению (4.12) для производственных функций Кобба – Дугласа

$$\frac{K^0}{L^0} = \frac{b}{a} \cdot \frac{w}{r} = \frac{0,5}{0,25} \cdot \frac{4}{32} = \frac{1}{4} \Rightarrow K^0 = \frac{1}{4} L^0 \ \frac{\text{и}}{\text{или}} \ L^0 = 4K^0. \quad (2)$$

Тогда производственная функция будет иметь вид

$$q = 16 \cdot (L^0)^{0,25} \left(\frac{1}{4} L^0\right)^{0,5} = 8 \cdot (L^0)^{0,75} \Rightarrow L^0(q) = \frac{1}{16} q^{\frac{4}{3}}. \quad (3)$$

Приведем те же итерации для капитала:

$$K^0(q) = \frac{1}{64} q^{\frac{4}{3}}. \quad (4)$$

Теперь можно получить функцию общих издержек:

$$TC(q) = w \cdot L(q) + r \cdot K(q) = 4 \cdot \frac{1}{16} q^{\frac{4}{3}} + 32 \cdot \frac{1}{64} q^{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4} q^{\frac{4}{3}}. \quad (5)$$

Вернемся к функции общей прибыли. Ее можно представить в виде

$$T\pi(q) = 3q - \frac{3}{4} q^{\frac{4}{3}}. \quad (6)$$

Таким образом, функция общей прибыли получена.

(*б*) Для определения объема выпуска, максимизирующего общую прибыль, воспользуемся *FOC* для задачи на максимум прибыли:

$$\frac{\partial T\pi(\cdot)}{\partial q} = 0. \tag{7}$$

Для нашей фирмы это условие выглядит так:

$$\frac{\partial T\pi(\cdot)}{\partial q} = 3 - \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3}(q^0)^{\frac{1}{3}} = 0. \tag{8}$$

Решив уравнение (8), получим: $q^0 = 27$.

Таким образом, максимизирующий общую прибыль объем выпуска составляет 27 единиц продукции.

Задание 5.2

Конкурентная фирма максимизирует общую прибыль и имеет производственные издержки, описываемые функцией

$$TC(q) = 2\,000 + 200q - q^{2,5}.$$

Может ли данная фирма достичь конкурентного равновесия (находиться в оптимуме)?

Решение и ответ

Для ответа на поставленный вопрос необходимо выяснить, выполняются ли для данной фирмы, в принципе, (1) необходимое и (2) достаточное условия максимизации общей прибыли. Далее нужно рассмотреть уровни цены, позволяющей обеспечить фирме оптимум.

Необходимое условие максимизации общей прибыли требует выполнения балансового условия, являющегося следствием из *FOC* для задачи на максимум прибыли:

$$MC(q^0) = p. \tag{1}$$

Выведем функцию предельных издержек из функции общих издержек:

$$MC(q) = \frac{\partial TC(q)}{\partial q} = 200 - 2,5q. \tag{2}$$

Из условия (1) и функции (2) получим: $q^0 = \dfrac{200 - p}{2,5} > 0$, если $0 < p < 200$. Следовательно при указанном ценовом диапазоне существует положительный объем, обеспечивающий выполнение балансового уравнения (1).

Проверим выполнение достаточного условия максимизации общей прибыли, вытекающего из *SOC* для задачи на максимум прибыли. Для конкурентной фирмы оно имеет вид

$$\frac{\partial MC(q^0)}{\partial q} > 0. \tag{3}$$

Проверим, возможно ли для нашей функции предельных издержек выполнение этого условия:

$$\frac{\partial MC(q)}{\partial q} = -2,5 < 0. \tag{4}$$

Из неравенства (4) следует, что предельные издержки – убывающая функция объема выпуска. Следовательно достаточное условие максимизации общей прибыли не выполняется ни при каком объеме выпуска. Из чего делаем заключение: фирма не может достичь конкурентного равновесия.

Графическая иллюстрация ответа приведена на рис. 5.19.

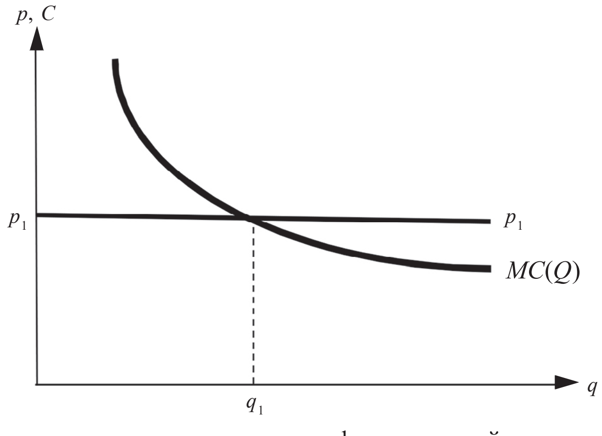

Рис. 5.19. Динамика предельных издержек фирмы: случай выполнения *FOC* и невыполнения *SOC* для задачи на максимум прибыли

Задание 5.3

Конкурентная фирма максимизирует общую прибыль и имеет производственные издержки, представление о которых дает функция средних издержек:

$$AC(q) = \frac{48}{q} - 3 + 0,75q.$$

Может ли данная фирма достичь конкурентного равновесия (находиться в оптимуме)? Если может, то какой должна быть минимальная рыночная цена, обеспечивающая фирме безубыточность?

Решение и ответ

Прежде всего определим вид функции общих издержек:

$$TC(q) = q \cdot AC(q) = 48 - 3q + 0,75q^2. \quad (1)$$

Из функции $TC(q)$ получим функцию $MC(q)$:

$$MC(q) = \frac{\partial TC(q)}{\partial q} = -3 + 1,5q. \quad (2)$$

Воспользуемся далее условием первого порядка для задачи на максимум прибыли и вытекающим из него необходимым условием максимизации прибыли:

$$MC(q^0) = p \Leftrightarrow 1,5q^0 - 3 = p. \quad (3)$$

Нетрудно обнаружить, что такое условие может быть выполнено.

Условие второго порядка для задачи на максимум прибыли можно не проверять, поскольку предельные издержки – возрастающая функция объема выпуска.

Вывод: рассматриваемая фирма может находиться в конкурентном равновесии.

Найдем цену, при которой фирма достигнет безубыточности. Цена как минимум должна покрывать средние издержки фирмы на минимальном их уровне. Цену на уровне минимальных средних издержек обозначим $\tilde{p}$. А объем, минимизирующий средние издержки, обозначим $\tilde{q}$.

Определим объем, при котором средние издержки минимальны. Для этого необходимо найти минимум функции $AC(q)$, взяв производную этой функции и приравняв ее к нулю:

$$\frac{\partial AC(\tilde{q})}{\partial q} = -\frac{48}{\tilde{q}^2} + 0,75 = 0. \tag{4}$$

Решим уравнение (4) и получим $\tilde{q} = 8$.

Тогда $\tilde{p} = AC(\tilde{q}) = 48 - 3 \cdot 8 + 0,75 \cdot 8^2 = 72$.

Можно также воспользоваться другим способом. Известно, что в точке минимума средние издержки равны предельным издержкам. Тогда

$$AC(\tilde{q}) = MC(\tilde{q}). \tag{5}$$

Распишем балансовое уравнение (5):

$$\frac{48}{\tilde{q}} - 3 + 7,5\tilde{q} = -3 + 1,5\tilde{q}. \tag{6}$$

Решим уравнение (6). Получим: $\tilde{q} = 8$. Результат – тот же, что и представленный выше.

Итак, минимальная цена, обеспечивающая фирме экономическую безубыточность, составляет 72 ден. ед.

Задание 5.4

Известно, что фирма имеет *U*-образные кривые предельных, средних переменных и средних издержек. Координаты точки минимума *AVC* – (20, 60); координаты точки минимума *AC* – (30, 80). Величина постоянных издержек фирмы – 500 ден. ед.

(*а*) Представьте графически вид кривых издержек данной фирмы (*MC*, *AVC*, *AC*).

(*б*) При какой цене данная фирма точно прекратит выпуск?

(*в*) Какая цена сложилась на конкурентном рынке, если фирма выбрала максимизирующий прибыль выпуск на уровне 40 единиц изделия?

(*г*) Покажите на графике величины общей и операционной прибыли данной фирмы при условии, что на рынке установилась цена, равная 100 ден. ед.

Решения и ответы

(*а*) Графики функций предельных, средних переменных и средних издержек представлены на рис. 5.20.

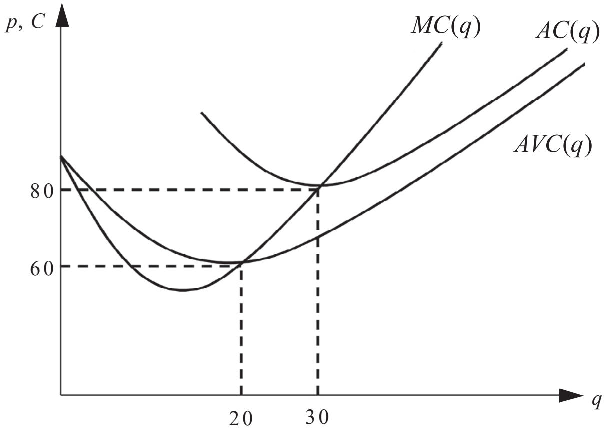

Рис. 5.20. Издержки фирмы

(*б*) Цена, которая заставит фирму выбрать нулевой выпуск, должна быть ниже минимальных средних переменных издержек. Следовательно при любой цене $p < 60$ фирма выберет $q^0 = 0$.

(*в*) Если $q^0 = 40$, фирма принимала решение при цене, превышающей минимальные средние издержки, т. е. при цене $p > 80$.

(*г*) Иллюстрация к заданию приведена на рис. 5.21.

Задание 5.5

Фирма имеет функцию общих издержек вида: $TC(q) = 10q^2 + 500$. Какой вид имеет функция предложения данной фирмы?

Решение и ответ

Функцию предложения для конкурентной фирмы можно получить, поставив и решив для нее задачу на максимум прибыли:

$$\begin{cases} \max T\pi(q), \\ T\pi(q) = p \cdot q - [10q^2 + 500] \geq -500, \\ q \geq 0. \end{cases} \quad (1)$$

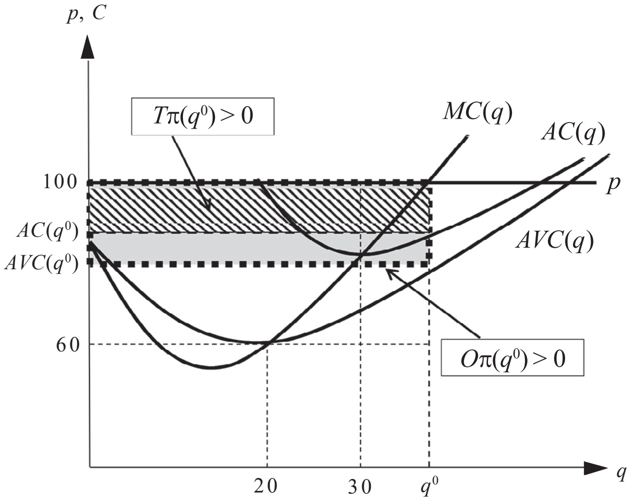

Рис. 5.21. Общая и операционная прибыль фирмы

Из *FOC* для этой задачи получим:

$$p - 2q^0 = 0. \tag{2}$$

Поскольку период, в котором действует фирма, – короткий, а структура и динамика издержек таковы, что средние переменные издержки – линейная возрастающая функция объема выпуска, никаких дополнительных условий не появляется. Тогда из балансового уравнения (2) получим:

$$S(p) \equiv q^0 = \frac{p}{2}, \ \forall\ p > 0. \tag{3}$$

Задание 5.6

Функция долгосрочных издержек фирмы имеет вид $TCL(q) = q^2 + 16$. Какой вид имеет функция долгосрочного предложения данной фирмы?

Решение и ответ

Функцию долгосрочного предложения для фирмы получим из решения задачи на максимум долгосрочной прибыли вида

$$\begin{cases} \max T\pi(q), \\ T\pi(q) = p \cdot q - TCL(q) \geq T\pi(0), \\ q \geq 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Максимум общей прибыли достигается при выполнении необходимого условия максимизации общей прибыли:

$$MCL(q^0) = p. \qquad (2)$$

Фирма принимает решения в длительном периоде, когда $T\pi(0) = 0$. Вследствие этого фирма, выбирая положительный объем выпуска, должна иметь неотрицательную прибыль. Соответственно долгосрочная цена должна быть такой, чтобы фирма как минимум покрывала в результате деятельности все понесенные затраты:

$$p \geq ACL(\tilde{q}), \qquad (3)$$

где $\tilde{q}$ – объем выпуска, при котором средние издержки длительного периода минимальны.

Конкретизируем вид функций $ACL(q)$ и $MCL(q)$, для этого преобразуем условия (2) и (3).

Теперь задача (1) может быть представлена как совокупность условий (2) и (3):

$$\begin{cases} p - 2q^0 = 0, \\ p \geq \dfrac{16}{\tilde{q}} + \tilde{q}, \\ q \geq 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Найдем величину $\tilde{q}$. Для этого продифференцируем функцию $ACL(q)$ и производную приравняем нулю:

$$-\frac{16}{(\tilde{q})^2} + 1 = 0 \Rightarrow \tilde{q} = 4 \Rightarrow ACL(\tilde{q}) = \frac{16}{4} + 4 = 8. \qquad (5)$$

Из системы уравнений (4) с учетом равенства (5) получим:

$$S^{LR}(p) \equiv q^0 = \begin{cases} 0, \text{ если } p < 8, \\ \dfrac{p}{2}, \text{ если } p \ge 8. \end{cases}$$

Задание 5.7

На совершенно конкурентном рынке цельного молока сложилась равновесная цена на уровне 48 руб. за литровый пакет. На рынке действует значительное количество фирм, производящих и реализующих молоко в пакетах.

Функция общих издержек репрезентативной фирмы имеет вид

$$TC(q) = \begin{cases} 64, \text{ если } Q = 0, \\ 100 + q^2, \text{ если } Q > 0. \end{cases}$$

(*а*) Определите вид функции предложения отдельной фирмы (аналитически и графически).

(*б*) Определите величину выигрыша продавца (*PS*) для репрезентативной фирмы.

(*в*) На данном рынке введен налог с продаж со ставкой t, равной 10 руб. Как в этом случае изменится вид функции предложения репрезентативной фирмы?

(*г*) Какие последствия для функции предложения и величины общей прибыли репрезентативной фирмы будет иметь введение паушального налога величиной $T = 200$ руб.?

(*д*) Правительство реализует программу поддержки производителей молока, предоставляя каждой фирме потоварную субсидию (τ) со ставкой 5 руб. за каждый проданный литр молока. Как в этих условиях изменится функция предложения репрезентативной фирмы?

(*е*) Рассмотрите последствия для функции предложения и величины общей прибыли фирмы замены потоварной субсидии паушальной величиной 500 руб.

Решения и ответы

(a) Функцию предложения для отдельной фирмы можно получить, поставив и решив задачу на максимум прибыли:

$$\begin{cases} \max T\pi(q), \\ T\pi(q) = p \cdot q - TC(q) \geq T\pi(0), \\ q \geq 0. \end{cases}$$

Поскольку $T\pi(0) = -64$, ограничение в задаче можно выписать в виде $p \geq \dfrac{36}{q} + q$.

Из условия первого порядка (необходимого условия максимизации общей прибыли) получим:

$$MC(q^0) = p \text{ или } 2q^0 = p.$$

Тогда задача приобретет такой вид:

$$\begin{cases} p \geq \dfrac{36}{q} + q, & (1) \\ 2q^0 = p. & (2) \end{cases}$$

Одновременно условия (1) и (2) выполняются, если

$$2q^0 \geq \frac{36}{q^0} + q^0, \text{ т. е. при } q \geq 6 \Rightarrow p \geq 12.$$

Решением этой задачи будет функция реакции фирмы на рыночную цену, или функция предложения отдельной фирмы:

$$S(p) = \begin{cases} \dfrac{p}{2}, \text{ если } p \geq 12, \\ 0, \text{ если } p < 12. \end{cases}$$

Графический вид функции предложения фирмы представлен на рис. 5.22.

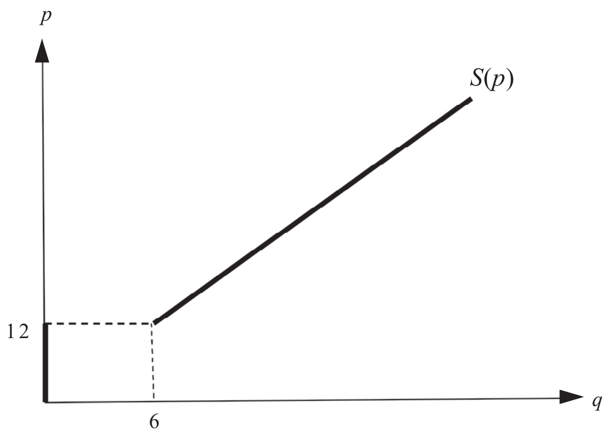

Рис. 5.22. Функция предложения фирмы

Таким образом, функция предложения фирмы имеет вид

$$S(p) = \begin{cases} \dfrac{p}{2}, \text{ если } p \geq 12, \\ 0, \text{ если } p < 12. \end{cases}$$

(*б*) Величина выигрыша продавца (*PS*), или операционной прибыли, может быть определена как разница между выручкой от реализации и всеми издержками, возникшими в результате выпуска продукта в определенном объеме.

При сложившейся на рынке цене литрового пакета молока (48 руб.) фирма выберет объем 24 единицы продукта. Тогда величина выигрыша продавца составит сумму, равную:

$$PS(24) \equiv O\pi(24) = TR(24) - VC(24) - QFC =$$
$$= 48 \cdot 24 - 24^2 - 36 = 540 \text{ (руб.)}.$$

Графически: *PS* – площадь заштрихованной трапеции на рис. 5.23.

$$PS = \frac{1}{2}(24+6)\cdot(48-12) = \frac{1}{2}\cdot 30 \cdot 36 = 540 \text{ (руб.)}.$$

Величина общей (экономической) прибыли:

$$T\pi(24) = O\pi(24) - FC = 540 - 64 = 476 \text{ (руб.)}.$$

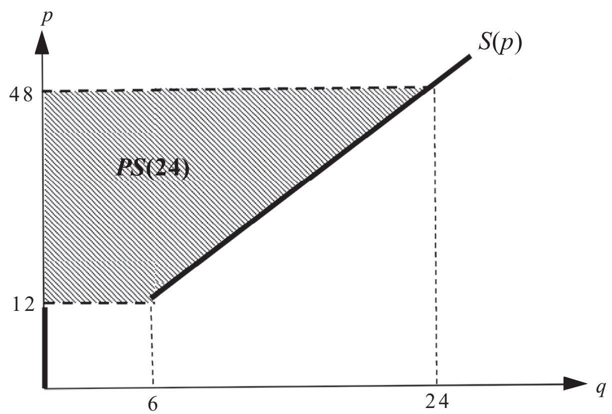

Рис. 5.23. Выигрыш продавца (операционная прибыль) для репрезентативной фирмы при равновесной цене

Проверим полученный результат, подставив соответствующие значения цены и объема в функцию общей прибыли:

$$T\pi(24) = TR(24) - TC(24) = 48 \cdot 24 - 24^2 - 100 = 476 \text{ (руб.)}.$$

Таким образом, выигрыш продавца (операционная прибыль) составляет 540 руб.; общая прибыль равна 476 руб.

(*в*) Введение налога с продаж со ставкой t обусловливает изменение вида функции общей прибыли:

$$T\pi(q) = p \cdot q - TC(q) - t \cdot q. \tag{1}$$

Это, безусловно, повлияет и на вид функции предложения фирмы.

Поскольку фирма реагирует не на цену реализации, а на «чистую цену продавца» [$p_{net} = p - t$], или, иначе, – эффективную цену, функция предложения будет иметь такой вид:

$$S^t(p) = \begin{cases} \dfrac{p_{net}}{2}, \text{ если } p_{net} = p - t = p - 10 \geq 12 \Leftrightarrow p \geq 22, \\ 0, \text{ если } p_{net} = p - 10 < 12 \Leftrightarrow p < 22. \end{cases} \tag{2}$$

Происходит сдвиг линии предельных издержек вверх на ставку налога. Следовательно и линия предложения смещается параллельно вверх на 10 руб. При этом величина левостороннего сдвига определяется эластичностью предложения по цене и составляет $\frac{t}{2} = 5$ единиц продукта, т. е. $\Delta S = -5$.

Хотя минимальная цена предложения и увеличилась, объем, при котором минимальны средние операционные издержки, не изменился. Докажем данное утверждение, выписав систему из уравнения и неравенства. Уравнение (3) является следствием из *FOC*; неравенство (4) отражает требование к цене, которая должна покрывать средние операционные издержки:

$$\begin{cases} 2q^0 = p, & (3) \\ p \geq \dfrac{36}{q} + q + 10. & (4) \end{cases}$$

Чтобы найти предельную цену, необходимо определить минимальную величину средних операционных издержек, которая достигается при объеме $\tilde{q}$. Для этого продифференцируем функцию $AOC^t(q)$ и приравняем производную к нулю:

$$\frac{\partial AOC^t(\tilde{q})}{\partial q} = -\frac{36}{\tilde{q}^2} + 1 = 0 \Rightarrow \tilde{q} = 6. \quad (5)$$

Рассчитаем уровень $AOC^t(\tilde{q})$:

$$AOC^t(\tilde{q}) = \frac{36}{6} + 6 + 10 = 22 \text{ (руб.)}.$$

Следовательно условия (3) и (4) выполняются одновременно, если

$$2q^0 \geq \frac{36}{q^0} + q^0 - 10, \text{ т. е. при } q \geq 6 \Rightarrow p \geq 22.$$

Новая функция предложения – $S^t(p)$ получена, таким образом, в результате сдвига исходной линии предложения «вверх – влево»: вверх – на 10 руб., влево – на 5 единиц продукта.

Функция предложения $S^t(p)$ представлена на рис. 5.24.

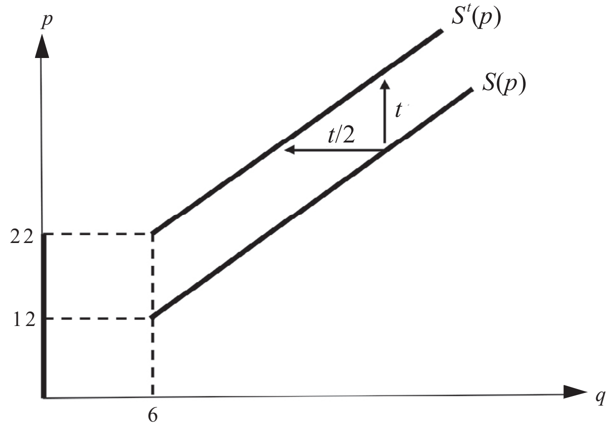

Рис. 5.24. Сдвиг линии предложения под воздействием потоварного налога со ставкой, определенной в денежных единицах

(*г*) Выписав функцию прибыли в условиях паушального налога, получим возможность найти функцию предложения фирмы:

$$T\pi(q) = p \cdot q - TC(q) - T. \tag{1}$$

Паушальный налог взимается безотносительно к результатам деятельности фирмы, поэтому его следует рассматривать как аналог постоянных издержек. Тогда из условия первого порядка получим тот же результат, что и в пункте (*а*) данного задания. Значит, вид функции предложения таков:

$$S(p) = \begin{cases} \frac{p}{2}, \text{ если } p \geq 12, \\ 0, \text{ если } p < 12. \end{cases}$$

Величина общей прибыли фирмы (для любого объема выпуска) уменьшится на полную ставку налога $T = 200$ руб.

(*д*) Субсидирование продавцов по ставке τ обусловливает изменение вида функции общей прибыли:

$$T\pi(q) = p \cdot q - TC(q) + \tau \cdot q. \tag{1}$$

Это обстоятельство влияет на вид функции предложения фирмы.

Поскольку фирма реагирует не на цену реализации, а на «чистую цену продавца» [$p_{net} = p + \tau$], или, иначе, на эффективную цену, функция предложения будет иметь вид

$$S^t(p) = \begin{cases} \dfrac{p_{net}}{2}, \text{ если } p_{net} = p + \tau = p + 5 \geq 12 \Leftrightarrow p \geq 7, \\ 0, \text{ если } p_{net} = p + 5 < 12 \Leftrightarrow p < 7. \end{cases} \quad (2)$$

Происходит сдвиг линии предельных издержек вниз на ставку субсидии. Следовательно линия предложения смещается параллельно вниз на 5 руб. При этом величина правостороннего сдвига линии предложения определяется эластичностью предложения по цене и составляет $\dfrac{\tau}{2} = 2{,}5$ единицы продукта, т. е. $\Delta S = +2{,}5$.

Хотя минимальная цена предложения и снизилась, объем, при котором минимальны средние операционные издержки, не изменился. Докажем данное утверждение, выписав систему из уравнения и неравенства. Уравнение (3) является следствием из *FOC*; неравенство (4) отражает требование к цене, которая должна покрывать средние операционные издержки:

$$\begin{cases} 2q^0 = p, & (3) \\ p \geq \dfrac{36}{q} + q - 5. & (4) \end{cases}$$

Чтобы найти предельную цену, необходимо определить минимальную величину средних операционных издержек, которая достигается при объеме $\tilde{q}$. Для этого продифференцируем функцию $AOC^\tau(q)$ и приравняем производную к нулю:

$$\frac{\partial AOC^\tau(\tilde{q})}{\partial q} = -\frac{36}{\tilde{q}^2} + 1 = 0 \Rightarrow \tilde{q} = 6. \quad (5)$$

Рассчитаем уровень $AOC^\tau(\tilde{q})$:

$$AOC^\tau(\tilde{q}) = \frac{36}{6} + 6 - 5 = 7 \text{ (руб.)}.$$

Следовательно условия (3) и (4) выполняются одновременно, если

$$2q^0 \geq \frac{36}{q^0} + q^0 + 5, \text{ т. е. при } q \geq 6 \Rightarrow p \geq 7.$$

Новая функция предложения – $S^{\tau}(p)$, таким образом, получена в результате сдвига исходной линии предложения «вниз – вправо»: вниз – на 5 руб., вправо – на 2,5 единицы продукта.

График новой функции предложения $S^{\tau}(p)$ представлен на рис. 5.25.

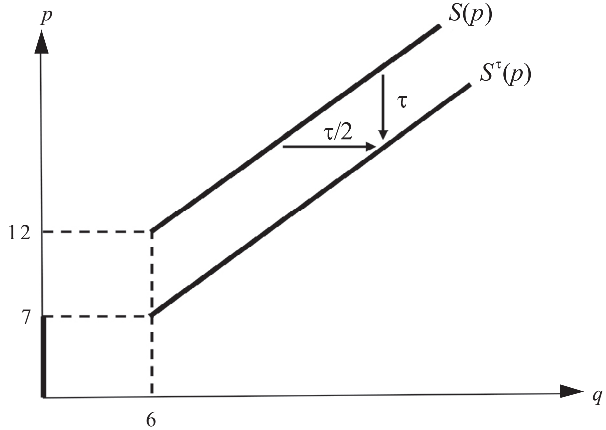

Рис. 5.25. Сдвиг линии предложения под воздействием потоварной субсидии со ставкой, определенной в денежных единицах

(*е*) Функция прибыли в условиях паушальной субсидии (Ψ = = 500 руб.) имеет вид

$$T\pi(q) = p \cdot q - TC(q) + 500.$$

Паушальная субсидия выплачивается безотносительно к результатам деятельности фирмы, поэтому ее следует рассматривать как аналог величины, уменьшающей постоянные издержки. Тогда из условия первого порядка получим тот же результат, что и в пункте (*а*) данного задания. Значит, вид функции предложения таков:

$$S(p) = \begin{cases} \frac{p}{2}, \text{ если } p \geq 12, \\ 0, \text{ если } p < 12. \end{cases}$$

Величина общей прибыли фирмы (для любого объема выпуска) увеличится на полную ставку паушальной субсидии $\Psi = 500$ руб.

Задание 5.8

Фирма использует в производственном процессе два фактора – труд и капитал. При сочетании цен продукта и ресурсов $(p_1, w_1, r_1) = (3, 2, 4)$ фирма выпускала 16 единиц готовой продукции, затрачивая факторы производства в количестве $(L_1, K_1) = (5, 7)$. Затем цены продукта и факторов производства изменились: $(p_2, w_2, r_2) = (2, 3, 2)$. В новых условиях фирма выбрала производственную программу $(Q_2, L_2, K_2) = (13, 4, 6)$. Совместимы ли подобные наблюдения с максимизацией прибыли?

Решение и ответ

Для ответа на поставленный вопрос необходимо рассмотреть совокупность неравенств (5.28), представляющих собой слабую аксиому максимизации прибыли (*WAPM*):

$$\begin{cases} p_1q_1 - w_1L_1 - r_1K_1 \geq p_1q_2 - w_1L_2 - r_1K_2, & (1) \\ p_2q_2 - w_2L_2 - r_2K_2 \geq p_2q_1 - w_2L_1 - r_2K_1. & (2) \end{cases}$$

Подставим в неравенство (1) из системы *WAPM* имеющиеся данные:

$3 \cdot 16 - 2 \cdot 5 - 4 \cdot 7 \geq 3 \cdot 13 - 2 \cdot 4 - 4 \cdot 6 \Leftrightarrow 10 \geq 7 \Rightarrow$ условие (1) выполнено.

Проверим выполнение условия (2). В соответствии с ним должно выполняться:

$$[2 \cdot 13 - 3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 2] \geq [2 \cdot 16 - 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 3] \Leftrightarrow [2] < [3].$$

Поскольку левая часть меньше правой, условие (2) не выполняется. Значит, слабая аксиома максимизации прибыли (*WAPM*) нарушена, что свидетельствует о нерациональном поведении фирмы (поведении, не согласующемся с принципом максимизации прибыли).

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Бусыгин В. П. Микроэкономика: третий уровень : учебник. В 2 т. Т. 1 / В. П. Бусыгин, Е. В. Желободько, А. А. Цыплаков. – Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2008. – С. 207–255.

Вэриан Х. Р. Микроэкономика. Промежуточный уровень. Современный подход / Х. Р. Вэриан. – М. : ЮНИТИ, 1997. – С. 339–421.

Кац М. Микроэкономика / М. Кац, Х. Роузен. – Минск : Новое знание, 2004. – С. 296–413.

Пиндайк Р. Микроэкономика / Р. Пиндайк, Д. Рубинфельд. – М. : Дело, 2000. – С. 199–318.

Современный словарь экономической теории Макмиллана. – М. : ИНФРА-М, 2003. – 608 с.

Теория фирмы / под ред. В. М. Гальперина. – СПб : Экономическая школа, 1995. – 534 с.

Чеканский А. Н. Микроэкономика. Промежуточный уровень : учебник / А. Н. Чеканский, Н. Л. Фролова. – М. : ИНФРА-М, 2005. – С. 157–221.

Чеканский А. Н. Микроэкономика. Промежуточный уровень : учебное пособие / А. Н. Чеканский, Н. Л. Фролова. – М. : ИНФРА-М, 2005. – С. 95–143.

Экономико-математический энциклопедический словарь / гл. ред. В. И. Данилов-Данильян. – М. : ИНФРА-М, 2003. – 688 с.

Mas-Colell A. Microeconomic Theory / A. Mas-Colell, M. D. Whinston, J. R. Green. – NY : Oxford University Press, 1995. – P. 127–147.

Varian H. R. Intermediate Microeconomics. A Modern Approach. – Third Ed. – NY ; L. : W.W. Norton & Company, 1993. – P. 303–378.

Приложение 1

Список основных обозначений, используемых в тексте

Обозначение	Расшифровка
Q, q	Объем выпуска фирмы
R_j	Количество j-го фактора производства
$\overline{R} = (R_1, R_2, ..., R_m)$	Комбинация факторов производства из m благ ($m \geq 2$)
$Q(\overline{R}) = Q(R_1, R_2, ..., R_m)$	Производственная функция
TFP	Общая факторная производительность
L	Количество фактора «труд»
K	Количество фактора «капитал»
w_j	Цена j-го фактора производства
$\overline{W} = (w_1, w_2, ..., w_m)$	Вектор цен факторов производства ($m \geq 2$)
p	Цена выпускаемого продукта
w	Ставка заработной платы (цена труда)
r	Цена капитала (ставка арендной платы за единицу капитала)
$T\pi(Q)$	Общая (экономическая) прибыль
$A\pi(Q)$	Средняя (экономическая) прибыль
$O\pi(Q)$	Операционная прибыль
PS	Выигрыш производителя
ΔPS	Изменение выигрыша производителя (продавца)
TR, $TR(Q)$	Общий доход

П р о д о л ж е н и е

Обозначение	Расшифровка
AR, $AR(Q)$	Средний доход
MR, $MR(Q)$	Предельный доход
$TC(Q)$	Общие издержки
$VC(Q)$	Переменные издержки
FC	Постоянные издержки
$AC(Q)$	Средние издержки
$MC(Q)$	Предельные издержки
QFC	Квазипостоянные издержки
$AVC(Q)$	Средние переменные издержки
$AFC(Q)$	Средние постоянные издержки
$OC(Q)$	Операционные издержки
$AOC(Q)$	Средние операционные издержки
TP_j	Общий продукт j-го фактора производства
AP_j	Средний продукт j-го фактора производства
MP_j	Предельный продукт j-го фактора производства
VMP_j	Стоимость (денежная оценка) предельного продукта j-го фактора производства
$MRTS_{ji}$ [$MRTS_{KL}$]	Предельная норма технического замещения j-м фактором i-го [труда – капиталом]
ShR	Короткий период
LR	Длительный период
ω	Масштаб производства
Ω	Отдача от масштаба
IRS	Возрастающая отдача от масштаба

Окончание

Обозначение	Расшифровка
CRS	Постоянная отдача от масштаба
DRS	Убывающая отдача от масштаба
ACL	Средние издержки длительного периода
MCL	Предельные издержки длительного периода
EP^{ShR}	Траектория расширения производства короткого периода
EP^{LR}	Траектория расширения производства длительного периода
Ł	Лагранжиан (функция Лагранжа)
$\eta(\eta^0)$	Неопределенный множитель Лагранжа в задаче на минимум издержек при ограничении на объем выпуска (значение неопределенного множителя Лагранжа в оптимуме)
R_j^0	Количество j-го фактора в оптимальной комбинации факторов производства
WACM	Слабая аксиома минимизации издержек
D_j	Спрос на j-й фактор производства
S, S_i	Предложение, предложение i-й фирмы
$i\pi_k$	Изопрофита (уровня k)
WAPM	Слабая аксиома максимизации прибыли

Приложение 2

Модели фирмы: типология и результаты применения

Наименование модели (задачи)	Формулировка модели	Применение модели и результаты
Прямая задача производителя	$\begin{cases} \min\,(w_1 \cdot R_1 + w_2 \cdot R_2 + \ldots + w_m \cdot R_m), \\ \widetilde{Q} - Q(R_1, R_2, \ldots, R_m) = 0, \\ R_j \geq 0, \forall\ j = \overline{1, m} \end{cases}$	Состав оптимальной комбинации факторов производства для выпуска на уровне $\widetilde{Q}$
Задача на максимум прибыли (переменные – затраты факторов производства)	$\begin{cases} \max\, T\pi(q(\overline{R})), \\ T\pi(q(\overline{R})) = p \cdot q(\overline{R}) - \sum_{j=1}^{m} w_j \cdot R_j \geq 0, \\ R_j > 0, \forall\ j = \overline{1, m} \end{cases}$	Структура оптимальных (минимизирующих издержки) комбинаций факторов производства длительного периода. Функции условного спроса на факторы производства. Траектория расширения производства длительного периода
Задача на максимум долгосрочной прибыли (переменная – объем выпуска), общий вид	$\begin{cases} \max\, T\pi(q), \\ T\pi(q) = TR(q) - TC(q) \geq 0, \\ q \geq 0 \end{cases}$	Оптимальный объем выпуска длительного периода (объем выпуска, максимизирующий общую прибыль в длительном периоде). Функция предложения фирмы для длительного периода

Окончание

Наименование модели (задачи)	Формулировка модели	Применение модели и результаты
Задача на максимум краткосрочной прибыли (переменная – объем выпуска)	$\begin{cases} \max T\pi(q), \\ T\pi(q) = TR(q) - TC(q) \geq -FC, \\ q \geq 0 \end{cases}$	Оптимальный объем выпуска короткого периода (объем выпуска, максимизирующий краткосрочную общую прибыль). Краткосрочная функция предложения фирмы
Задача на максимум операционной прибыли (переменная – объем выпуска)	$\begin{cases} \max Q\pi(q), \\ Q\pi(q) = TR(q) - VC(q) \geq 0, \\ q \geq 0 \end{cases}$	Оптимальный объем выпуска короткого периода (объем выпуска, максимизирующий краткосрочную общую прибыль и операционную прибыль). Краткосрочная функция предложения фирмы

Учебное издание

Боголюбова Надежда Павловна

МИКРОЭКОНОМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ: ФИРМА В ПРОИЗВОДСТВЕ И В СФЕРЕ ОБМЕНА

Учебное пособие

Заведующий редакцией *М. А. Овечкина*
Редактор *Е. И. Маркина*
Корректор *Е. И. Маркина*
Компьютерная верстка *Г. Б. Головина*

Подписано в печать 20.07.18. Формат 60×84/16.
Бумага офсетная. Цифровая печать.
Уч.-изд. л. 9,7. Усл. печ. л. 11,16. Тираж 50 экз. Заказ 122.

Издательство Уральского университета
Редакционно-издательский отдел ИПЦ УрФУ
620083, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4
Тел.: +7 (343) 389-94-79, 350-43-28
E-mail: rio.marina.ovechkina@mail.ru

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ
620083, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4
Тел.: +7 (343) 358-93-06, 350-58-20, 350-90-13
Факс: +7 (343) 358-93-06
http://print.urfu.ru

ЛИДЕР УНИВЕРСИТЕТСКОГО КНИГОИЗДАНИЯ
УНИВЕРСИТЕТСКАЯ КНИГА
2015

9785799623371